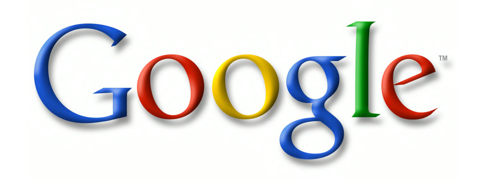
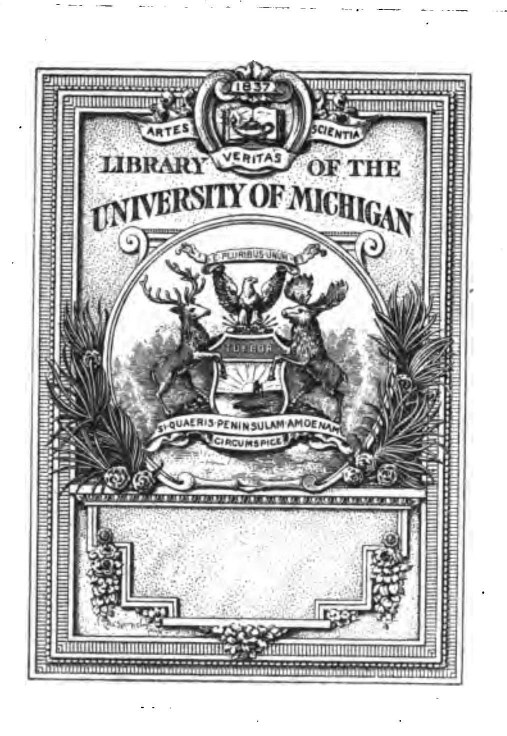



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE

M. J. BOURGET

Agrégé de l'Université, Docteur ès sciences
Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe

TOME DEUXIÈME.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1878

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

THÉORIE DE L'INVERSION
OU
MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES

par M. Cochez.

(*Suite*, voir tome Ier, page 353.)

De la transformation des distances et des aires.

XVIII. *Transformation des distances.* — Soient (A, a), (B, b) deux couples de points réciproques, μ le module de transformation, O le pôle.

Nous avons vu (n° I) que les triangles OAB, Oab sont semblables et les droites AB et ab anti parallèles ; on a de plus

$$\frac{AB}{ab} = \frac{OA}{Ob}.$$

Multiplions les deux termes de la seconde fraction par Oa, il vient

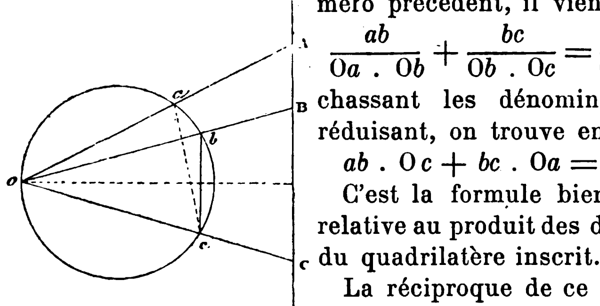
$$AB = \frac{ab\ .\ OA\ .\ Oa}{Oa\ .\ Ob} = \mu \frac{ab}{Oa\ .\ Ob}.$$

Telle est la formule fondamentale de la transformation des distances, dont nous allons donner quelques applications.

XIX. — Soient quatre points O, a, b, c, situés sur une circonférence de rayon quelconque.

Prenons le point O comme pôle de transformation. Les trois points a, b, c, seront remplacés par les trois points A, B, C, en ligne droite (n° III).

Mais $$AB + BC = AC;$$



en appliquant la formule du numéro précédent, il vient

$$\frac{ab}{Oa\ .\ Ob} + \frac{bc}{Ob\ .\ Oc} = \frac{ac}{Oa\ .\ Oc};$$

chassant les dénominateurs et réduisant, on trouve enfin

$$ab\ .\ Oc + bc\ .\ Oa = ac\ .\ Ob.$$

C'est la formule bien connue relative au produit des diagonales du quadrilatère inscrit.

La réciproque de ce théorème, dû à Ptolémée, est facile à établir. En effet, si l'on a entre les distances de quatre points a, b, c, O, la relation

$$ab\ .\ Oc + bc\ .\ Oa = ac\ .\ Ob,$$

les quatre points a, b, c, O sont sur une circonférence, car si l'on prend le point O pour pôle d'inversion, cette relation devient $\quad AB + BC = AC$

et par suite les points A, B, C, sont en ligne droite.

Donc en revenant à la figure primitive, on voit que les points a, b, c sont sur une circonférence passant par le pôle; c. q. f. d.

Le théorème précédent en renferme beaucoup d'autres comme cas particuliers.

1° Si les points O, a, b c, sont les sommets d'un rectangle, on retrouve le théorème du carré de l'hypoténuse;

2° Si les points a, b, c sont les sommets d'un triangle équilatéral, on a $\quad Oa + Oc = Ob,$

d'où ce théorème :

Si l'on joint les sommets d'un triangle équilatéral à un point quelconque de la circonférence circonscrite, la ligne de jonction qui traverse le triangle est égale à la somme des deux autres.

3° Si les points O et b sont diamétralement opposés et si nous désignons par $2x$ et $2y$ les arcs Oa, Oc, en prenant le rayon de la circonférence pour unité, on a

$$Oa = 2 \sin x, \qquad ab = 2 \cos x, \qquad ob = 2,$$
$$Oc = 2 \sin y, \qquad bc = 2 \cos y, \qquad ac = 2 \sin (x + y),$$

et le théorème précédent donne

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x.$$

XX. — Ce théorème s'applique encore à un nombre quelconque de points O, a, b, c, ... m, pris sur une circonférence.

En effet, prenons pour pôle de transformation le point O, les points a, b, c, ... m, seront remplacés par des points A, B, C, ... M en ligne droite. On a

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD} + \ldots\ldots = \mathrm{AM}$$

donc

$$\frac{ab}{\mathrm{O}a \,.\, \mathrm{O}b} + \frac{bc}{\mathrm{O}b \,.\, \mathrm{O}c} + \ldots\ldots = \frac{am}{\mathrm{O}a \,.\, \mathrm{O}m}.$$

Soient $abcde$ les sommets d'un pentagone régulier et O un point de la circonférence circonscrite. En tenant compte des signes, on a la relation

$$\frac{ab}{\mathrm{O}a \,.\, \mathrm{O}b} + \frac{bc}{\mathrm{O}b \,.\, \mathrm{O}c} = \frac{ac}{\mathrm{O}a \,.\, \mathrm{O}c},$$

et des relations analogues obtenues par permutations circulaires.

Si donc l'on désigne par p le côté du pentagone et par q la diagonale, on a

$$\begin{aligned} p\,(\mathrm{O}a + \mathrm{O}c) &= q \,.\, \mathrm{O}b, \\ p\,(\mathrm{O}b + \mathrm{O}d) &= q \,.\, \mathrm{O}c, \\ p\,(\mathrm{O}c + \mathrm{O}e) &= q \,.\, \mathrm{O}d, \\ p\,(\mathrm{O}d + \mathrm{O}a) &= q \,.\, \mathrm{O}e, \\ p\,(\mathrm{O}e + \mathrm{O}b) &= q \,.\, \mathrm{O}a; \end{aligned}$$

ajoutant membre à membre, il vient

$$(2p - q)\,(\mathrm{O}a + \mathrm{O}b + \mathrm{O}c + \mathrm{O}d + \mathrm{O}e) = 0,$$

et comme $2p - q$ ne peut être nul, on doit avoir

$$\mathrm{O}a + \mathrm{O}b + \mathrm{O}c + \mathrm{O}d + \mathrm{O}e = 0,$$

De là ce théorème : *Si l'on joint les sommets d'un pentagone régulier à un point quelconque de la circonférence circonscrite, la somme des lignes qui joignent ce point aux sommets de rang pair égale la somme des lignes qui le joignent aux sommets de rang impair.* (N[lles] Annales de Mathé. 2[e] série, tome XV, question 1213.)

Ce théorème s'applique à un polygone régulier d'un nombre impair de côtés.

XXI. — *Théorème sur le quotient des diagonales du quadrilatère inscrit.*

Dans le triangle ABO, on a (fig. de l'article XIX)

$$\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 - 2AB \,.\, BO \cos OBC\,;$$

de même, dans le triangle BOC,

$$\overline{OC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BO}^2 - 2BC \,.\, BO \cos ABO.$$

Or, cos ABO et cos OBC étant des quantités égales et de signes contraires, on déduit de ces relations en les ajoutant membre à membre après avoir multiplié les deux membres de la première par BC et ceux de la seconde par AB :

$$BC \,.\, \overline{OA}^2 + AB \,.\, \overline{OC}^2 = AC \,.\, \overline{OB}^2 + AB \,.\, BC \,.\, AC.$$

En prenant le point O pour pôle d'inversion, cette relation devient, après quelques simplifications :

$$\frac{ac}{Ob} = \frac{ab \,.\, bc + oa \,.\, oc}{ab \,.\, oa + bc \,.\, oc}.$$

XXII. — Nous donnerons encore un exemple du principe général de la transformation des distances en partant du théorème suivant, dont la démonstration est connue : *Si à un cercle* C *inscrit à un angle* AOB, *on mène une tangente intérieure* AB, *le triangle* AOB *a un périmètre constant.*

Ceci posé, construisons la figure inverse en prenant pour pôle le sommet O et μ pour module. La figure inverse du cercle DE est un cercle *de* inscrit dans l'angle; la figure inverse de la droite AB est une circonférence O*ab* passant par le pôle et touchant la circonférence *de* au point *t*, réciproque de T; la relation

$$OA + OB + AB = 2p$$

devient

$$\frac{\mu}{Oa} + \frac{\mu}{OB} + \mu\frac{ab}{Oa.Ob} = 2p,$$

ou plus simplement :

$$\frac{Ob + Oa + ab}{Oa\ Ob} = \frac{2p}{\mu}.$$

Désignons par S l'aire du triangle Oab et par r le rayon du cercle inscrit à ce triangle, nous aurons

$$2S = Oa\ .\ Ob \sin O = r\,[Ob + Oa + ab];$$

donc l'égalité précédente équivaut à

$$r = \text{constante}.$$

Ainsi, quelle que soit la tangente ab, le triangle Oab est circonscrit à une circonférence fixe I, non tracée sur la figure, inscrite à l'angle AOB. Les tangentes extérieures à cette circonférence sont les cordes ab des circonférences variables Oab, tangentes à la circonférence fixe de. Nous pourrons donc énoncer la proposition suivante :

Théorème : *Si à un cercle* I, *inscrit à un angle* aOb, *on mène une tangente extérieure quelconque* ab, *la circonférence circonscrite au triangle* Oab *est tangente à une circonférence fixe* de, *inscrite à l'angle* aOb.

Ce remarquable théorème est dû à M. Mannheim (1).

XXIII. *Transformation des aires.* — Soit une droite AB et Oab la figure inverse. Les triangles Oab, OAB ayant un angle commun donnent

$$\frac{Oab}{OAB} = \frac{Oa\ .\ Ob}{OA\ .\ OB}.$$

Multiplions les deux termes du second membre par le produit $Oa\ .\ Ob$, nous avons

$$\frac{Oab}{OB} = \frac{\overline{Oa}^2 \cdot \overline{Ob}}{\mu^2}.$$

Soit h la distance du point O à la droite AB, et R le rayon de la circonférence, on a

$$2R = \frac{\mu}{h},$$

et $$OAB = AB\ .\ \frac{h}{2} = AB\,\frac{\mu}{4R};$$

d'autre part, $$AB = \mu\,\frac{ab}{Oa\ .\ Ob};$$

(1) Voir *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, par M. Catalan, 5e édition, page 122.

donc $$Oab = \frac{Oa \, . \, Ob}{4R} \, . \, ab.$$

On retrouve la formule connue de l'aire du triangle inscrit.

(*A suivre.*)

NOTE SUR LA CONVERSION

DES

fractions décimales périodiques en fractions ordinaires,

par M. M., professeur agrégé de l'Université.

I. — Soit à convertir en fraction ordinaire la fraction périodique simple 2,545454.....

Proposons-nous de chercher les deux nombres a et b, dont la division donne le quotient périodique proposé.

Le quotient de la division de a par b à une unité est 2, et le reste est inconnu; appelons-le r,

(1) $$a = b \times 2 + r.$$

Le quotient de la division de a par b à 0,01 près est 2,54; donc $100a$ divisé par b donne pour quotient 254, et le reste de cette division est précisément r, puisque la période recommence après ce reste,

(2) $$100a = b \times 254 + r.$$

Retranchons membre à membre l'égalité (1) de l'égalité, nous aurons

(2), $$99a = b \times (254 - 2);$$

divisons les deux membres par $99b$, nous aurons

$$\frac{a}{b} = \frac{254 - 2}{99}.$$

Nous ne trouvons pas a et b, mais une fraction équivalente à $\frac{a}{b}$; de là résulte la règle connue : *pour trouver une fraction ordinaire qui engendre une fraction périodique simple, on retranche la partie entière de la fraction du nombre*

entier formé par cette partie entière suivie d'une période, on a ainsi le numérateur, et on prend pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres à la période. Nous avons pris pour exemple une fraction périodique simple ayant une partie entière, afin de pouvoir ramener la conversion d'une fraction décimale périodique mixte en fraction ordinaire à celle d'une fraction périodique simple.

II. — Soit à convertir en fraction ordinaire la fraction décimale périodique mixte 2,341686868.....

Désignons par a et b les deux nombres dont la division donne pour quotient 2,341686868..., et multiplions a par une puissance de 10 dont l'exposant égale le nombre des chiffres décimaux non périodiques, la troisième, le quotient de la division de $1000a$ par b sera évidemment 2341,686868...; mais ce quotient est une fraction périodique simple à partie entière, dont la fraction génératrice équivaut à $\frac{234168 - 2341}{99}$; le quotient de a par b sera 1000 fois plus petit,

$$\frac{a}{b} = \frac{234168 - 2341}{99000}.$$

De là résulte la règle connue : *pour trouver une fraction ordinaire qui engendre une fraction périodique mixte, on retranche le nombre entier formé par la partie entière suivie des chiffres décimaux non périodiques du nombre entier formé par la partie entière suivie des chiffres décimaux non périodiques et d'une période, on a ainsi le numérateur, et on prend pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres à la période, suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux non périodiques.*

III. — Pour compléter la démonstration qui précède, il est nécessaire de démontrer que la seconde période commence quand on a retrouvé le reste auquel a commencé la première.

Il est certain que toutes les périodes ne peuvent pas commencer à des restes différents, car le diviseur étant b, le reste est au plus égal à $b - 1$, et si $b - 1$ périodes ont commencé à des restes différents, ces restes sont les $b - 1$ premiers nombres, le reste suivant sera donc l'un

d'eux. Cela étant, reprenons l'exemple 2,545454... et supposons que la 7e période commence au même reste r, que la 4e; en plaçant 6 zéros à la droite de r, et divisant par b, on trouvera pour quotient 545454, et pour reste r,

$$1000000 \times r = b \times 545454 + r;$$

retranchons r aux deux membres,

(1) $$999999\, r = b \times 545454,$$

ou $$99 \times 10101\, r = b \times 54 \times 10101;$$

divisons les deux membres par 10101,

(2) $$99\, r = b \times 54,$$

$$100\, r - r = b \times 54,$$

ajoutons r aux deux membres,

$$100\, r = b \times 54 + r;$$

donc en plaçant deux zéros à droite de r, et en divisant par b, on trouve pour quotient la période, et pour reste r, c'est-à-dire que deux périodes successives commencent nécessairement au même reste, et, par conséquent, la seconde commence au même reste que la première.

Cette démonstration prouve incidemment que si l'on considérait la période comme formée des 6 chiffres 545454, et qu'on appliquât la règle de conversion en fraction ordinaire, on arriverait au même résultat qu'en prenant pour période 54, car de l'égalité (1), on tire

$$\frac{r}{b} = \frac{545454}{999999}.$$

et de l'égalité (2), $$\frac{r}{b} = \frac{54}{99};$$

donc $$\frac{545454}{999999} = \frac{54}{99}.$$

IV. — Si le dénominateur d'une fraction ordinaire irréductible est premier avec 10, la fraction convertie en décimales donne naissance à une fraction périodique simple.

Soit $\frac{a}{b}$ la fraction proposée, e la partie entière du quotient, r_1 le reste, on a

$$a = b \times e + r_1.$$

Je dis que r_1 est premier avec b, car s'il ne l'était pas, r_1 et b auraient un facteur commun qui, divisant le second

membre diviserait le premier a; donc a et b ne seraient pas premiers entre eux, ce qui est contraire à l'hypothèse. Pour prouver que la fraction décimale engendrée par $\frac{a}{b}$ est périodique simple, il suffit de prouver que le premier des restes successifs, qui sera égal à un reste précédemment obtenu, sera égal à r_1. Supposons qu'un reste quelconque r_8 soit le premier qui égale un reste précédent r_3, je dis que r_8 sera égal à r_1 : en effet, r_1, suivi de deux zéros et divisé par b, donne pour reste r_3, et r_1 suivi de 7 zéros, et divisé par b, donne aussi pour reste r_8. On a donc

$$10000000\, r_1 = b \times m + r_8,$$
$$100\, r_1 = b \times m' + r_3,$$

retranchons ces égalités membre à membre,

$$9999900\, r_1 = b \times (m - m'),$$
$$99999 \times 100 \times r_1 = b \times (m - m');$$

b divise le second membre, il doit diviser le premier; mais il est premier avec 100 et avec r_1, il doit donc diviser l'autre facteur 99999, et l'on a

$$99999 = b \times q;$$

multiplions les deux membres par r_1, et remplaçons 99999 par $100000 - 1$,

$$(100000 - 1) \times r_1 = b \times q \times r_1,$$
$$100000\, r_1 - r_1 = b \times q \times r_1,$$
$$100000\, r_1 = b \times q \times r_1 + r_1$$

donc r_1 suivi de 5 zéros, et divisé par b, donne pour reste r_1, r_1 est donc le premier reste périodique, et la période commence immédiatement après la virgule du quotient.

V. — Si le dénominateur d'une fraction irréductible $\frac{a}{B}$ n'est pas premier avec 10, cette fraction engendre une fraction décimale périodique mixte, et le nombre des chiffres décimaux de la partie non périodique est égal au plus fort exposant des facteurs 2 et 5 dans le dénominateur B.

Soit B égal à $2^4 \times 5 \times b$, $2^4 \times 5$ et b sont premiers avec 10; or on a

$$a = 2^4 \times 5 \times b \times e + r_1$$

r_1 est premier avec $2^4 \times 5$ et avec b, car si un nombre divisait à la fois r_1 et $2^4 \times 5$ ou b, il diviserait le second

membre, donc il diviserait le premier a, donc a ne serait pas premier avec $2^4 \times 5$ ou avec b, et $\frac{a}{B}$ ne serait pas irréductible. Cela démontré, supposons que 10^x soit une puissance de 10 telle que $r_1 \times 10^x$ divisé par B donne un reste r_{x+1} se reproduisant ultérieurement, et soit 10^{x+y} la puissance suivante de 10 telle que $r_1 \times 10^{x+y}$ divisé par B donne le même reste r_{x+1}; on a

$$r_1 \times 10^{x+y} = B \times m + r_{x+1}.$$
$$r_1 \times 10^x = B \times m' + r_{x+1},$$

retranchons ces égalités membre à membre, il vient

$$r_1 \times 10^x \times (10^y - 1) = B\,(m - m')$$
$$= b \times 2^4 \times 5 \times (m - m').$$

$2^4 \times 5$ divise le second membre, il doit diviser le premier; mais il est premier avec r_1, et avec $10^y - 1$, qui est composé exclusivement de chiffres égaux à 9; donc $2^4 \times 5$ divise 10^x, x est donc au moins égal à 4; donc le premier reste qui se reproduise est le 5[e], et le premier chiffre décimal du quotient de a par B, qui se reproduise, est aussi le 5[e]; il y a donc 4 décimales non périodiques, ce qui démontre le théorème énoncé.

ÉTUDE SUR LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE

par F. R. A.

I. Les trois opérations directes.

La première opération dont l'idée se présente est l'Addition, *par laquelle on cherche un nombre qui exprime autant d'unités et parties d'unité qu'il y en a dans des nombres donnés :*

$$4 + 3 = 7 \text{ (1)}$$

L'addition de plusieurs nombres égaux donne naissance à la Multiplication, *opération par laquelle on répète un pre-*

(1) 4 plus 3 égale 7.

mier nombre autant de fois que l'indique un second :

$$4 + 4 + 4 = 4 \times 3 \text{ ou } 4 \,.\, 3 = 12 \text{ (1)}.$$

De même, la multiplication de plusieurs facteurs égaux donne naissance à l'élévation aux puissances, ou EXALTATION, *opération par laquelle un premier nombre est pris comme facteur autant de fois que l'indique un second nombre :*

$$4 \times 4 \times 4 \text{ ou } 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 4^3 = 64 \text{ (2)}$$

Le premier nombre est appelé *racine*, le second *exposant* ou *degré*, et le résultat est une *puissance*.

Telles sont les trois *opérations directes*.

Dans les deux premières, les rôles *passif* et *actif* des nombres sont indifférents : 4 augmenté de 3 donne autant que 3 augmenté de 4; de même, 4 répété 3 fois donne autant que 3 répété 4 fois.

Il en est autrement dans l'Exaltation : 4 élevé à la 3e puissance égale 4 . 4 . 4 ou 64; et 3 élevé à la 4e puissance égale 3 . 3 . 3 . 3 ou 81. Le nombre 64 ne renferme que des facteurs 4, ou plutôt des facteurs 2, et le nombre 81 ne renferme que des facteurs 3.

Les rôles de *racine* et d'*exposant* ne sont donc pas indifférents; les deux nombres ne fonctionnent pas d'une manière symétrique, et l'on ne peut ici, comme dans l'addition et la multiplication, introduire d'autres nombres au même titre que les premiers, pour donner naissance à une nouvelle opération directe.

II. Les opérations inverses.

Lorsqu'une opération directe a été faite avec deux nombres, on peut se donner le résultat (*total*, *produit* ou *puissance*) et l'un des deux nombres primitifs, dans le but de trouver l'autre. Cette recherche donne lieu à une nouvelle opération qui est *inverse* de la première.

Par exemple, étant donnés 7 comme *total* de deux nombres, et 4 comme l'un de ces nombres, on trouve l'autre en retranchant 4 de 7 : $7 - 4 = 3$ (3)

---

(1) 4 multiplié par 3 égale 12.
(2) 4 exposant 3 égale 64.
(3) 7 moins 4 égale 3.

Et l'on trouverait de même $7 - 3 = 4$.

La Soustraction *est une opération par laquelle, étant donnés le total de deux nombres et l'un de ces nombres, on cherche l'autre.*

Autre exemple : Si l'on prend 12 comme *produit* de deux nombres, et 4 comme l'un des facteurs, on trouve l'autre facteur en cherchant combien de fois 12 contient 4, ou bien en prenant le $\frac{1}{4}$ de 12 :

$$12 : 4 \text{ ou } \frac{12}{4} = 3 \text{ (1).}$$

On trouverait de même $12 : 3$ ou $\frac{12}{3} = 4$.

La Division *est une opération par laquelle, étant donnés le produit de deux nombres et l'un de ces nombres, on cherche l'autre.*

Enfin, considérons une Exaltation, c'est-à-dire une formation de puissance, par exemple $4^3 = 64$.

Si l'on se donne 64 comme *puissance* et 3 comme *exposant*, on trouve la *racine* en décomposant 64 en 3 facteurs égaux; l'opération que l'on fait alors est appelée *extraction de racine*, ou simplement *Extraction*. On écrit

$$\sqrt[3]{64} \text{ ou } 64^{1/3} = 4 \text{ (2).}$$

L'Extraction *est une opération par laquelle, étant donnés une puissance et son degré, on cherche la racine.*

Etant données la *puissance* 64 et la *racine* 4, on peut se proposer de chercher l'*exposant*, c'est-à-dire le nombre qui exprime combien de fois 4 est facteur dans 64; à cette fin, on peut diviser 64 par 4, puis le résultat par 4, le nouveau résultat encore par 4, jusqu'à ce qu'on obtienne 1 pour quotient. A chaque division que l'on fait, on enlève un facteur 4; et ainsi, *l'exposant est égal au nombre des divisions successives que l'on peut faire de la puissance par la racine.*

64	4		
24	16	4	
0	0	4	4
		0	1

Autrement :

64	4
16	4
4	4
1	

(1) 12 divisé par 4, ou 12 sur 4, égale 3.

(2) Racine 3e de 64, ou 64 exposant 1/3, égale 4.

Comme il y a trois divisions possibles, on conclut que 4 est 3 fois facteur dans 64.

Cette opération ayant pour objet la recherche d'un *exposant*, ou la résolution d'une *équation exponentielle* ($4^x = 64$), nous la nommerons *exponentation.*

Et pour l'indiquer de manière à rappeler *le nombre des divisions successives que l'on peut faire de la puissance par la racine*, nous emploierons les signes ci-après :

$$64 \; (:) \; 4 \text{ ou } \frac{64}{4} = 3.$$

On lira : 64 *exponenté par* 4 *égale* 3.

Et la définition de cette septième et dernière opération se formulera naturellement comme il suit :

L'Exponentation *est une opération par laquelle, étant données une puissance et sa racine, on cherche l'exposant.*

Les rôles passif et actif étant indifférents dans l'Addition et dans la Multiplication, chacune de ces deux opérations directes ne donne lieu qu'à une seule opération inverse.

Mais, dans l'Exaltation, les rôles de *racine* et d'*exposant* n'étant pas convertibles, la recherche de la racine et celle de l'exposant donnent lieu à deux opérations distinctes.

Nous arrivons donc à la notion de *sept opérations*, et l'on voit que le *Calcul* proprement dit n'en comprend pas davantage.

Dans ses *Eléments d'Algèbre*, Euler avait établi, entre les diverses opérations de l'Arithmétique, un rapprochement fort ingénieux, que Bourdon expose dans ses *Éléments d'Arithmétique* (n° 276), et qu'il accompagne de cette remarque : « La recherche de l'exposant exige une opération toute particulière, qui sera en quelque sorte une *septième opération* de l'arithmétique. »

III. Relations entre les opérations.

D'après l'exposé qui précède, *le Calcul comprend sept opérations*, qui se classent naturellement en trois familles, comme il suit :

1re famille : Addition, *Soustraction ;*
2e famille : Multiplication, *Division ;*
3e famille : Exaltation, *Extraction* et *Exponentation.*

L'étude des propriétés montre une correspondance remarquable, d'une part entre les opérations directes, d'autre part entre les opérations inverses.

On sait que la Division présente deux aspects différents, selon que le facteur connu est le multiplicateur ou le multiplicande : le premier de ces cas correspond à l'Extraction des racines, et le second à l'Exponentation, ce qui va être précisé ci-après.

Voici quelques relations qui tiennent à la nature même des opérations.

1° Dans l'*Addition*, on fait le total de plusieurs nombres quelconques : dans la *Multiplication*, on fait, d'une manière abrégée, le total de plusieurs nombres égaux.

2° Dans la *Multiplication*, on fait le produit de plusieurs facteurs quelconques; dans *l'Exaltation*, on fait le produit de plusieurs facteurs égaux.

3° Dans la *Soustraction*, on enlève une partie d'un total pour trouver l'autre partie : dans la *Division*, on enlève un facteur d'un produit pour trouver l'autre facteur.

4° Dans la *Soustraction*, on cherche ce qui reste après qu'un nombre a été retranché une fois d'un autre : dans la *Division*, on cherche combien de fois un nombre peut être soustrait successivement d'un autre.

5° Dans la *Division*, on partage un nombre en parties égales : dans l'*Extraction*, on décompose un nombre en facteurs égaux.

6° Dans la *Division*, on cherche combien de fois un nombre fonctionne dans un autre comme partie d'un tout : dans l'*Exponentation*, on cherche combien de fois un nombre fonctionne dans un autre comme facteur d'un produit.

7° Dans la *Division*, le quotient est égal au nombre des soustractions successives que l'on peut faire du diviseur sur le dividende : dans l'*Exponentation*, l'exposant est égal au nombre des divisions successives que l'on peut faire de la puissance par la racine.

(A suivre.)

NOTE SUR LE TRINOME ET LA FRACTION

DU SECOND DEGRÉ.

On peut représenter, au moyen d'une construction graphique, l'étude du trinôme et de la fraction du second degré. Cette construction très-simple nous permettra de nous rendre compte des diverses particularités que présente la fraction que nous considérons.

Pour faire comprendre facilement ce qui va suivre, il nous suffira de rappeler que Steiner appelle puissance d'un point par rapport à un cercle le produit des distances de ce point aux points de rencontre du cercle et d'une sécante menée par le point. — Si le point est intérieur au cercle, la puissance est négative ; si le point est extérieur, la puissance est positive et représentée par le carré de la tangente menée du point au cercle.

I. *Variation du signe du trinôme.*

Nous prendrons le trinôme sous la forme $x^2 - px + q$. Nous savons que l'on passe de cette forme à la forme générale, en multipliant la première par une quantité constante, ce qui ne change pas les particularités que présente la fonction. Il peut se présenter trois cas :

1° Les racines sont réelles et inégales; on peut mettre le trinôme sous la forme $(x - a)(x - b)$, et l'on voit que si, à partir d'une origine fixe sur une droite OX [1], on prend $OA = a$, $OB = b$, $OX = x$, le trinôme n'est pas autre chose que le produit de deux grandeurs XA et XB, c'est-à-dire la puissance du point X par rapport à un cercle passant par les points A et B. On voit donc que cette puissance est positive tant que le point X n'est pas entre les points A et B, et négative dans le cas contraire. On en conclut facilement que le trinôme est positif tant que x n'est pas compris entre les deux racines a et b, et qu'il est négatif si x est compris entre a et b.

1. Le lecteur est prié de faire la figure.

2° Les racines sont réelles et égales. Les points A et B sont alors confondus, le cercle qui passe par ces deux points est tangent à la droite OX, et comme, tant que le point X n'est pas confondu avec le point de contact, il existe une tangente de longueur finie, son carré est positif; donc la puissance du point X par rapport au cercle est toujours positive. Le trinôme est donc lui-même positif, mais peut s'annuler.

3° Les racines sont imaginaires. Dans ce cas, le trinôme peut se mettre sous la forme $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + K^2$. Si nous prenons sur OX une longueur $OM = \frac{p}{2}$, et si nous élevons au point M une perpendiculaire égale à K, on aura d'abord $XM = x - \frac{p}{2}$, et, dans le triangle rectangle XMR, on aura $\overline{RX}^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + K^2$. Donc le trinôme sera représenté par le carré de la ligne XR; et comme dans ce cas la ligne XR existe toujours, et n'est jamais nulle, on voit que le trinôme est toujours positif et ne peut pas s'annuler.

II. *Variation de grandeur du trinôme.*

La construction précédente nous apprendra facilement comment varie la fonction que nous considérons. En effet, si les racines sont imaginaires ou réelles et égales, on voit que la fonction passe par un minimum lorsque le point X′ se confond avec le point M ou avec le point A. Car, dans le premier cas, la ligne RM est la ligne la plus courte que l'on puisse mener du point R à la droite. Dans le second cas, la fonction est nulle pour le point A, et pour tout autre position du point X, la fonction est positive.

Pour le cas où les racines sont réelles et inégales, on sait que, en appelant C le centre, r le rayon du cercle, la puissance du point X est représentée en grandeur et en signe par $\overline{CX}^2 - r^2$. Donc, comme le second terme est fixe, cette expression variera dans le même sens que CX, et par conséquent

sera minima en même temps que CX. On voit donc que, dans tous les cas, il y aura minimum correspondant au cas où l'on donnera à x une valeur égale à la demi-somme des racines ; c'est le résultat que donne directement l'algèbre.

III. *Maximum ou minimum de la fraction du 2me degré.*

Considérons maintenant la fraction

$$y = \frac{x^2 - px + q}{x^2 - p'x + q'}.$$

Soient, comme tout à l'heure, a et b les racines du numérateur, c et d les racines du dénominateur. Nous prendrons encore les points A, B, C, D et X sur une droite et la recherche du maximum ou du minimum de la fraction revient à ce problème qui avait déjà préoccupé Pappus et Fermat.

Trouver sur la droite indéfinie un point X *tel que le rapport*

$$\frac{XA \,.\, XB}{XC \,.\, XD},$$

soit un maximum ou un minimum.

On voit que chaque terme de cette fraction représente une puissance, par rapport à un cercle qui passe par les deux points A et B, ou par les deux points C et D. Dans le cas où les racines seront imaginaires ou au numérateur ou au dénominateur, le terme correspondant représentera le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle déterminé comme nous l'avons dit plus haut.

Cela posé, au lieu de prendre une origine quelconque, prenons le point de la droite qui a même puissance par rapport aux groupes de points (A,B), (C,D), s'ils existent, ou bien par rapport aux points tels que R, si les racines sont imaginaires. On sait que, pour construire ce point, il suffit de prendre la rencontre de la droite avec l'axe radical de deux cercles ou d'un cercle et d'un point ou de deux points. Alors, la fraction se mettra sous la forme

$$y = \frac{x^2 - px + q}{x^2 - p'x + q};$$

le terme tout connu au numérateur et au dénominateur sera le même, puisqu'il représente la puissance de l'origine par rapport aux deux groupes de points.

En ordonnant par rapport à x, on trouve

$$x^2(1-y) - x(p-p'y) + q(1-y) = 0.$$

La condition de maximum ou de minimum devient

$$(p-p'y)^2 = 4q(1-y)^2,$$

ou

$$\frac{p-p'y}{2(1-y)} = \pm\sqrt{q}.$$

Si nous cherchons la valeur correspondante de x, nous trouvons précisément $\frac{p-p'y}{2(1-y)}$, ou $\pm\sqrt{q}$.

Il sera donc facile de construire cette valeur de x; on mènera une tangente de l'origine au cercle passant par un des groupes de points, et on la rabattra sur la ligne OX. Les points marqués en rabattant dans les deux directions à partir du point O donneront les points limites.

Remarque. — Il y aura des points limites à la condition que l'on puisse de l'origine mener des tangentes aux cercles, ou, en d'autres termes, que la puissance de l'origine au cercle soit positive. Or, cela se présente si les racines des deux termes sont imaginaires et aussi si l'un des deux termes de la fraction a ses racines imaginaires. Dans le cas où les racines sont réelles au numérateur et au dénominateur, tant que les deux segments sont extérieurs l'un à l'autre, le problème est encore susceptible d'un maximum et d'un minimum; mais si les deux segments empiètent l'un sur l'autre, l'axe radical rencontrerait la droite dans la partie commune aux deux segments; la puissance du point sera négative, et par suite on ne pourra plus mener de tangente au cercle. Il n'y aura donc ni maximum ni minimum.

On arriverait du reste, par l'algèbre à ce résultat. En effet, on peut toujours, par un déplacement convenable d'origine, ramener l'expression à la forme que nous lui avons donnée. Pour que, alors, il n'y ait ni maximum ni minimum, il faut que, en résolvant par rappart à x, la quantité sous le radical ait ses racines imaginaires. En cherchant la condition pour que cela ait lieu, on trouve

$$4q(p-p')^2 < 0,$$

ou $q < 0$. Ce qui exige que la nouvelle origine soit à l'intérieur de chacun des deux segments, ce qui ne peut arriver

que s'ils empiètent l'un sur l'autre. Les divers résultats que l'on obtient par l'algèbre sont donc donnés par notre discussion, qui a l'avantage de parler aux yeux en même temps qu'à l'esprit.

A. M.

CONCOURS POUR L'ÉCOLE CENTRALE.

Compositions mathématiques.

Soit un parallélogramme OABC. Sur la diagonale OC, on prend un point I, et on considère une conique ayant pour centre le point I, et passant aux trois points O, A, B. A cette conique on mène des tangentes parallèles à OA, et des tangentes parallèles à OB, lieu du point des concours de ces tangentes lorsque le point I parcourt la ligne indéfinie OC. On distinguera les points du lieu qui correspondent au cas où la conique donnée est une ellipse, et ceux qui correspondent au cas où c'est une hyperbole.

(*Août 1868.*)

On donne dans un plan deux ellipses concentriques dont les axes coïncident en direction, et une droite AB. Par un point quelconque P, pris sur cette droite, on mène des tangentes aux deux ellipses, puis les cordes de contact qui leur correspondent dans chaque ellipse. Ces cordes se coupent en un point M. On demande : 1° le lieu du point M lorsque le point parcourt la droite AB; 2° le lieu du centre du lieu du point M lorsque la droite AB tourne autour du centre des deux ellipses en restant à une distance constante de ce centre. (*Octobre 1868.*)

Soient Ox, Oy, deux axes rectangulaires, et H un point fixe sur l'axe des y, ayant pour ordonnée h. On sait que l'équation générale des coniques qui ont un foyer au point O, passent au point H et ont l'axe focal sur OX est

$$l^2(x^2+y^2) = h^2(x-l)^2,$$

dans laquelle le paramètre variable l représente l'abcisse de la directrice correspondant au foyer O. Cela posé, on demande de résoudre les questions suivantes :

1° On considère l'une quelconque des coniques représentées par cette équation. On mène par le point O une parallèle à la tangente en H à cette conique. Cette parallèle rencontre la conique en deux points dont on demande le lieu lorsque l'on fait varier l; on séparera les parties qui correspondent au cas où la conique est une ellipse de celles qui correspondent au cas où la conique est une hyperbole;

2° On considère l'une quelconque des hyperboles représentées par l'équation; par le point O, on mène des parallèles aux asymptotes; on demande le lieu du point de rencontre de ces parallèles avec la courbe lorsque l'on fait varier l;

3° On considère encore l'une des hyperboles précédentes, et l'on mène les parallèles aux asymptotes par le pied de la directrice correspondant au foyer O. On demande le lieu du point de rencontre avec la courbe.

(*Août 1869.*)

Soit un triangle ABC, et O le milieu de AC; on mène une droite DE parallèle à OB; elle rencontre les côtés CB et AB ou leurs prolongements en D et E; on mène enfin les droites AD, CE; ces droites se coupent en M. On demande : 1° le lieu du point M, lorsque la droite DE se déplace parallèlement à elle-même; 2° le lieu du point de rencontre de la droite DE et de la tangente au lieu précédent au point M correspondant à une position de DE. (*Mars 1871.*)

On donne dans un plan deux droites rectangulaires OX, OY, et une hyperbole équilatère ayant pour équation $xy = m^2$. P et Q étant deux points du plan tels que la droite PQ soit parallèle à OX et ait son milieu en I sur l'hyperbole, on demande : 1° de trouver le lieu décrit par le point O lorsque le point P décrit une droite quelconque D du plan; 2° de prouver que la tangente au lieu en un point quelconque passe par le point où la droite D rencontre la tangente en I à l'hyperbole; 3° de trouver le lieu des foyers du lieu précédent lorsque la droite D tourne autour du point où elle rencontre OX. (*Août 1871.*)

On demande le lieu des sommets des hyperboles qui passent par un point donné, dont une asymptote est une droite donnée, tandis que l'autre asymptote est seulement parallèle à une direction donnée. (*Octobre 1871.*)

CONCOURS GENÉRAUX.

CONCOURS DE 1857.

Classe de troisième (sciences).

Étant données dans un plan deux circonférences concentriques et un point, mener par ce point une sécante telle que la portion de cette droite comprise entre les deux circonférences soit égale à une longueur donnée.

Calculer à moins de un centimètre carré près la surface d'un losange, sachant que la plus petite diagonale est égale à l'un des côtés et que la plus grande a une longueur de $1^m,98$.

Classe de seconde (sciences).

On circonscrit à un cercle un hexagone régulier ABCDEF; on mène le diamètre FC et les diagonales AC et BF, qui se coupent en un point I, sur le rayon OH perpendiculaire à FC. Si l'on fait tourner la figure autour de OH comme diamètre, les triangles FIC, AIB engendrent des cônes. On demande l'expression de leur surface et celle de leur volume en fonction du rayon du cercle.

Classe de rhétorique (sciences).

Étant donnés le foyer et la directrice d'une parabole, trouver sur l'axe un point d'où l'on puisse mener à la courbe deux normales comprenant entre elles un angle donné.

Classe de logique (lettres).

Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, inscrit dans un cercle, on abaisse du centre O sur les côtés non consécutifs AB, CD, EF, les perpendiculaires OM, ON, OP, que l'on prend égales au côté du carré inscrit dans le même cercle. On propose de démontrer que le triangle MNP, ainsi obtenu, est équivalent à l'hexagone.

Classe de logique (sciences).

Démontrer qu'une équation du second degré à une inconnue ne peut avoir que deux racines.

Étant donnés sur un plan une droite et un cercle, l'angle formé en joignant un point de la circonférence aux deux extrémités de la droite est-il susceptible ou non de maximum ou de minimum?

CONCOURS DE 1858.

Classe de troisième (sciences).

Trois triangles APB, AQB, ARB, ont une base commune AB. Les triangles sont entièrement donnés, et l'on connaît les côtés et les angles de chacun d'eux. On demande de calculer les angles du triangle formé par les bissectrices des trois angles APB, AQB, ARB.

On fera l'application au cas où l'on a

$$RAB = \frac{2}{23};\ RBA = \frac{33}{19};\ QBA = \frac{17}{13};\ QAB = \frac{5}{17};\ PAB = \frac{2}{5};\ PBA = \frac{3}{11}.$$

L'unité de mesure de l'angle est l'angle droit.

Classe de seconde (sciences).

Étant donné un triangle ABC, dans lequel l'angle en A est aigu, déterminer la droite menée par A extérieurement au triangle et dans son plan telle que le volume engendré par le triangle tournant autour de cette droite soit le plus grand possible..

Discussion complète des formules générales qui donnent les valeurs de x et de y dans le système

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Classe de rhétorique (sciences).

On donne dans un plan deux points A, B, et une droite CD. 1° Construire une ellipse ayant A et B pour foyers et tangente à CD. 2° Démontrer que toute ellipse décrite des mêmes foyers A et B et dont le grand axe surpasse celui de l'ellipse trouvée coupe CD en deux points. 3° Démontrer que le problème de construire une ellipse ayant pour foyers les points A et B, et telle que la corde interceptée sur la droite CD ait une longueur donnée est toujours possible et n'admet qu'une solution.

Classe de logique (lettres).

Exposez la marche à suivre pour obtenir la racine carrée du nombre 118400.

Faire connaître les propriétés des polygônes semblables et leur application au lever de plans.

Classe de logique (sciences).

Démontrer les propriétés suivantes :

1° Étant donnés deux angles trièdres égaux, et ayant le même sommet, on peut toujours mener par ce sommet une droite telle que si l'on fait tourner le premier trièdre autour de cette droite comme axe, il vienne coïncider avec le second.

2° Si deux nombres *n* et *n'* jouissent de cette propriété que chacun d'eux est la somme des carrés de deux nombres entiers, le produit *nn'* de ces nombres sera également la somme des carrés de deux nombres entiers.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.

FACULTÉ DE POITIERS.

Session de 1872.

— On donne un cercle et un diamètre AB. A quelle distance du centre O faut-il mener la corde DE perpendiculaire sur AB, pour que la surface latérale du cône engendré par la révolution de la corde AD autour de AB soit à la surface de la zone AMD dans un rapport donné $\frac{1}{n}$? — Entre quelles limites doit être compris le nombre *n*?

Sessions de 1873.

—Etant données les traces d'une droite perpendiculaire à la ligne de terre et une droite dans le plan vertical, trouver l'angle de ces deux droites et construire la bissectrice.

— Deux côtés d'un triangle ont pour longueur 8870^{m},5 et 13121^{m},5. L'angle compris est 65° 16′ 30″. Trouver le troisième côté.

—Trouver le volume du segment de sphère compris sous la zone polaire. Le cercle polaire est à 23° 30′ du pôle.

— Trouver deux nombres, connaissant leur somme et la somme de leurs cubes.

—Inscrire dans une sphère un cylindre, sachant que son volume est égal à la somme des segments de la sphère qui ont même base.

— Etant donné un cercle de rayon *r*, et un point situé à une distance *a* du centre, mener par ce point une sécante telle que la corde ait une longueur donnée *b*.

— Trouver en degrés, minutes et secondes l'angle x, pour lequel on a
$$2 \sin x + 3 \cos x = 1.$$
— A quelle distance du sommet faut-il mener un plan parallèle à la base d'un cône pour que la surface latérale soit divisée en deux parties ayant un rapport donné?

— Calculer le volume du tronc de pyramide triangulaire en le considérant comme la différence entre deux pyramides.

— Trouver un nombre de trois chiffres sachant que le chiffre des dizaines est moyen proportionnel entre les deux autres; que l'inverse du chiffre des centaines est égal à l'inverse du chiffre des dizaines plus deux fois l'inverse du chiffre des unités; que le chiffre des unités est égal au produit des deux autres.

— Rendre calculable par logarithmes l'expression $1 - \sin^2 x - \sin^2 y$. Trouver le maximum et le minimum de cette expression, sachant que la somme $x + y$ est constante.

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le **docteur Henri Suter**, de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon.

Suite. Voir Tome Ier, page 368.

LA SCIENCE CHEZ LES GRECS.

Son importation. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie.

Les commencements de la culture des sciences sont enveloppés d'épaisses ténèbres, aussi bien chez les Grecs que chez les peuples dont nous venons de parler. Comme pour ces derniers, les connaissances des Grecs en Mathématiques et en Astronomie, avant Thalès et Pythagore, se bornaient aux relations inévitables qui existent entre l'agriculture, la navigation, la distribution du temps en vue des fêtes religieuses et les phénomènes périodiques du ciel, savoir: le mouvement des constellations, l'observation des éclipses. La division du zodiaque, le partage du ciel étoilé en constellations et les désignations mythologiques de ces dernières, semblent avoir été l'objet d'une attention et d'une faveur toute spéciales de la part des Grecs. Leur

religion polythéiste et leur mythologie raffinée se prêtaient bien à ces jeux d'allégorie mystique. Les peuples de l'Occident ont adopté, dans leur ensemble, les dénominations et les signes imaginés par les Grecs.

Les auteurs grecs et les savants modernes veulent placer l'origine de l'astronomie grecque, c'est-à-dire le partage du ciel étoilé en constellations, à l'époque de l'expédition des Argonautes et de la guerre de Troie. Mais de telles présomptions n'ont aucune solidité réelle. Le développement de la vie intellectuelle, les progrès des sciences ne sont pas attachés à un moment unique, déterminé. Ils sont intimement liés au développement, à la prospérité et à la décadence des nations. Les poëtes peuvent bien laisser leur fantaisie s'ébattre au milieu de ces événements; mais l'historien reconnaît dans la marche du développement de tous les peuples une loi constante, invariable.

Nous passerons donc sous silence les fables et les mythes que l'inépuisable fantaisie des Grecs inscrivit dans le livre du ciel; nous négligerons d'énumérer les traditions qui attribuent à quelques hommes le mérite d'avoir transplanté en Grèce les sciences et les arts de l'Égypte, de la Phénicie, etc., pour remonter aux époques où Thalès et Pythagore, en fondant les premières écoles philosophiques de Mathématiques et d'Astronomie, se sont avancés sur un terrain plus réel, ont visé un but plus élevé.

Malheureusement il ne nous est parvenu de cette première période du développement scientifique qu'un petit nombre de renseignements, et encore sont-ils incertains et incomplets. La plupart des écrivains tels que *Diogène Laërce, Plutarque, Jamblique,* ne nous ont fourni que très-peu d'indications absolument indirectes, isolées, souvent contradictoires; de sorte qu'il est souvent très-difficile et même impossible de découvrir la vérité. Les documents les plus dignes de confiance ont été empruntés à l'histoire de l'Astronomie et de la géométrie de *Eudemus. Eudemus* était un élève d'*Aristote;* et, d'après le témoignage de *Proclus* et d'autres mathématiciens, il était très-versé dans les sciences. Au grand détriment de l'investigation historique, il ne

reste que quelques fragments insignifiants de son ouvrage; ces fragments nous ont été conservés, en partie par *Proclus*, dans son Commentaire d'Euclide, en partie par *Simplicius* dans son Commentaire d'*Aristote*, *Physica auscultatio*. — A peu près à la même époque que *Eudemus*, *Théophraste* d'*Erèse* écrivit une Histoire des Mathématiques qui est également perdue. En outre, Thalès, Pythagore et la plupart des philosophes de cette époque n'ont pas laissé de monuments écrits; par suite, il a été parfois difficile, même pour les auteurs grecs, de décider à quel mathématicien il fallait attribuer telle ou telle invention.

D'après le témoignage unanime des principaux écrivains qui ont traité de la vie des philosophes grecs, c'est à *Thalès* que l'on doit l'importation de la géométrie et de l'astronomie scientifique d'Égypte en Grèce. *Thalès* était né à Milet en l'an 640 avant J.-C. Il quitta de bonne heure sa patrie pour aller étudier chez les sages de l'Égypte les sciences de la nature. Dans ce pays même, selon *Plutarque*, il aurait bientôt surpassé ses maîtres, et, au grand étonnement du roi *Amasis*, calculé la hauteur des pyramides d'après leur ombre. Le même écrivain dit aussi que, dans ce calcul, *Thalès* aurait pris pour point de départ cette proposition : le rapport de tous les corps à leur ombre est le même au même moment. Ce mode de mesure supposerait connue la théorie des projections; et il ne nous est pas permis d'admettre qu'elle fût plus familière à Thalès qu'aux Égyptiens, car elle n'apparaît que beaucoup plus tard dans les mathématiques des Grecs. Aussi devons-nous ajouter foi de préférence à *Diogène Laërce*, qui fait mesurer par *Thalès* la hauteur de la pyramide lorsque l'ombre a la même longueur que l'objet.

Le Commentaire du premier livre d'*Euclide*, par *Proclus*, nous renseigne sur les autres propositions géométriques qui sont attribuées à *Thalès*. Ce sont : la preuve de l'égalité des angles à la base du triangle isoscèle, des trois angles du triangle équilatéral; la démonstration du second cas d'égalité des triangles; la solution du problème qui a pour but de mesurer, du port, la distance des vaisseaux en mer,

et la preuve que le cercle est divisé par le diamètre en deux parties égales. — *Diogène Laërce* lui attribue, en outre, la découverte de cette proposition : les triangles ayant pour base un diamètre du cercle et pour sommet un point de la circonférence, sont rectangles. *Thalès* aurait été si heureux d'une telle découverte qu'il aurait sacrifié un taureau. Ce fait est rapporté du reste par d'autres auteurs, notamment par *Pythagore*, au sujet de la même proposition.

Il est impossible de savoir quelles sont, parmi ces propositions, celles qui étaient l'œuvre originale de *Thalès* et de pouvoir distinguer celles qui étaient déjà connues des Égyptiens. Tout ce que l'on peut dire, du moins d'après l'unique papyrus de *Khind*, c'est que les Égyptiens devaient déjà être au courant de ces propositions élémentaires de la géométrie plane. Toutefois il ne faut pas conclure avec *Bretschneider* que les découvertes de *Thalès* ne s'étendaient pas au delà. *Proclus* remarque même que les propositions mentionnées ci-dessus sont loin d'être les seules dues à *Thalès*; que ce géomètre avait fait beaucoup de découvertes et qu'il avait transmis à ses successeurs les principes de beaucoup d'autres; il avait généralisé telle proposition, et rendu telle autre plus compréhensible.

Toutefois on ne sait si *Thalès* s'était approprié tout le savoir géométrique des Égyptiens; car, ainsi que le rapportent quelques écrivains, c'est vers l'Astronomie qu'il avait particulièrement porté son attention. Il peut donc, à son insu, avoir émis comme siennes les propositions que les Égyptiens connaissaient déjà. Éclaircir ce point serait d'ailleurs chose inutile. Il nous suffit de savoir quelles étaient les propositions de géométrie connues des Grecs à cette époque. Qu'elles aient été découvertes par les Égyptiens ou par *Thalès*, peu importe.

Nous considérons les Égyptiens comme les véritables maîtres de *Thalès* dans les calculs et les observations de l'astronomie scientifique. On connaît sa prédiction d'une éclipse pour l'année 585 avant J.-C. L'éclipse eut lieu en effet à cette époque, mais il n'est point certain que *Thalès* ait aussi indiqué le jour précis de cet événement. Les écri-

vains sont muets à cet égard. *Diogène Laerce* et *Plutarque* lui attribuent en outre la découverte de la marche du Soleil entre les deux tropiques, la division de l'année en 365 jours, la théorie concernant la forme sphérique de la Terre et sa situation au centre du monde, l'obliquité de l'écliptique, et la division de la sphère céleste en cinq zones. D'autres écrivains se trouvent à ce sujet d'accord avec ces deux derniers et nous autorisent à regarder ces indications comme exactes.

La même confiance ne doit pas toujours être accordée à *Diogène Laërce* : selon cet historien (lib. I), la grandeur de la lune serait, d'après *Thalès,* la 720e partie de celle du soleil : « Και πρῶτος τὸ τοῦ ἡλιου μέγετος τοῦ σηλενέιου ἑπταχοσιοστὸν καὶ εἰκοςτὸν μέρος ἀπεφήνατο κατά τινας. » Cette interprétation de *Diogène Laërce* donnée aux opinions des anciens philosophes sur les sciences de la nature est fausse comme tant d'autres. Dans l'état de nos connaissances sur les notions astronomiques de l'École ionienne et de l'École pythagoricienne, la seule manière d'interpréter ce passage est d'admettre que *Thalès* avait trouvé dans le diamètre du Soleil la 720e partie du chemin parcouru par cet astre. Cette explication est directement confirmée par un passage d'*Apulée*, qui dit dans le livre IV des *Florides :* « Idem (Thalès), sane jam proclivi senectute, divinam rationem de sole commentatus est, quam equidem non didici modo, verum etiam experiundo comprobavi : quotiens sol magnitudine sua circulum, quem permeat, metiatur. Id a se recens inventum, Thales memoratur edocuisse Mandraytum Prienensem, etc. »

La proportion entre le diamètre apparent du Soleil et la périphérie du zodiaque aurait donc déjà été déterminée assez exactement par *Thalès*. Il est singulier toutefois que l'antiquité ne nous fournisse pas d'autres données sur ce point.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 55.

Solution par M. Chellier, élève du Lycée de Constantine.

Trouver cinq nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des trois autres.

Soit x le nombre moyen, les autres seront $x + 2$, $x + 1$, $x - 1$, $x - 2$,
et l'on doit avoir

$$(x + 2)^2 + (x + 1)^2 = x^2 + (x - 1)^2 + (x - 2)^2,$$

ou en développant et simplifiant

$$x(x - 12) = 0,$$

équation satisfaite pour $x = 0$ et $x = 12$.

Les cinq nombres cherchés sont donc

$$-2, -1, 0, +1, +2,$$

ou

$$10, \quad 11, \quad 12, \quad 13, \quad 14.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Aubert et Aurenty, de Marseille; Bernard, Trokay, de Liége; Biette, du Havre; de Casamajor, de Perpignan; Cordeau, école Lavoisier; Dilhan (Jérôme), de Saint-Gaudens; Giros, Dusseaux, de Nancy; Hugentobler, de Boppelsen (Suisse); Thual, de Lorient; Vautré, de Saint-Dié; Tissier, lycée de Châteauroux; Berthet, collége d'Annecy; Bruyand, Franquet, du lycée de Troyes; Chastang, du lycée de Pau; Gélinet, du lycée d'Orléans; Vitrac, du lycée d'Angoulême; Robin, de Mont-de-Marsan; Canuet, de Cherbourg.

QUESTION 56.

Solution par M. Pyolle, au Lycée de Constantine.

Lorsque les trois côtés d'un triangle rectangle sont en progression arithmétique, le rayon du cercle inscrit est égal à la raison de cette progression. (Arnoye.)

On sait que, dans tout triangle, le rayon du cercle inscrit est égal à la surface divisée par le demi-périmètre;

$$r = \frac{S}{p}. \qquad (1)$$

Désignons par a le côté moyen et par x la raison inconnue, on a $(a - x)^2 + a^2 = (a + x)^2$,

d'où $$x = \frac{a}{4}.$$

La surface de ce triangle est $\frac{3a^2}{8}$; le demi-périmètre $\frac{3a}{2}$

et la relation (1) donne $r = \frac{a}{4}$; c. q. f. d.

Nota. — **Ont résolu la même question : MM. Aubert et Aurenty, de Marseille; Bernard, de Liége; Biette, du Havre; Cordeau, école Lavoisier; Dilhan (Jérôme), de Saint-Gaudens; Thùal, de Lorient; Vautré, de Saint-Dié; Gélinet, lycée d'Orléans; de Casamajor, de Perpignan; Dalzon, pensionnat Saint-Louis à Saint-Étienne; Brice, à la Flèche; Macé, à Cherbourg; Hugentobler, à Boppelsen; Franquet à Troyes; Tissier, de Châteauroux.**

QUESTIONS PROPOSÉES

95. — Pour trouver le plus grand commun diviseur entre A et a, on peut s'y prendre de la manière suivante. On multiplie A par la suite des nombres 1, 2, 3, ... a, et on cherche combien on obtient ainsi de nombres divisibles par a. Leur nombre est le plus grand commun diviseur cherché.

96. — Le nombre p étant premier avec 10, montrer qu'on peut toujours trouver un multiple de p terminé par des chiffres pris arbitrairement.

97. — Construire un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois parallèles données.

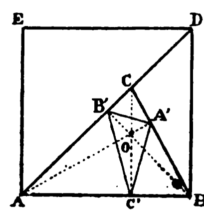
98. — Le volume d'un cône s'obtient en divisant le carré de la surface latérale par trois fois la circonférence d'un grand cercle de la sphère circonscrite. . . . (*Dostor.*)

99. — Dans un triangle se trouve inscrit un rectangle. Si B et H désignent la base et la hauteur du triangle, b et h la base et la hauteur du rectangle,

on a $$\frac{b}{B} + \frac{h}{H} = 1.$$

100. — Lorsqu'on élève au carré le produit de deux nombres entiers consécutifs augmenté de 1, l'on obtient une somme de trois carrés. En général, le carré du trinôme $a^2 + ab + b^2$ est égal à la somme de trois carrés.

101. — Étant donné le carré ABDE, sur la diagonale AD,



je prends le point C, tel que $CD = \frac{AD}{3}$; je joins le point B au point C, et je forme un triangle ABC. On demande de démontrer en désignant les côtés et les angles d'après l'usage ordinaire, les propriétés suivantes :

1° Tang A = 1 ; tang B = 2 ; tang C = 3.

2° Aire $ABC = b^2 - a^2 = \frac{c^2}{3}$.

En considérant les segments des côtés et des hauteurs, on a

3° $AB' = 3B'C$; $AC' = 2C'B$; $CA' = \frac{2}{3} A'B$.

4° $AO = 5OA'$; $BO = 2OB'$; $CO = OC'$.

En prenant le triangle A'B'C', formé par les pieds des hauteurs de ABC, on a

5° $\frac{c'}{3} = \frac{b'}{4} = \frac{a'}{5}$.

6° Aire $A'B'C' = \frac{1}{5}$ aire ABC.

7° Le rayon du cercle inscrit au triangle A'B'C' est le $\frac{1}{5}$ de celui du cercle circonscrit au triangle ABC.

(Gambey.)

$(a^2+ab+b^2)^2 = (a(a+b)+b^2)^2$
$= a^2(a+b)^2 + 2b^2a(a+b) + b^4$
$= a^2(a+b)^2 + a^2b^2 + b^2(a^2+2ab+b^2)$
$= a^2(a+b)^2 + a^2b^2 + b^2(a+b)^2.$

Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 20308-4.

$(a^2+ab+b^2)^2 = (a(a+b)+b(a+b)-ab)^2$
$= a^2(a+b)^2 + b^2(a+b)^2 + a^2b^2 - 2ab^2(a+b)$
$+ 2ab(a+b)^2 - 2a^2b(a+b)$
$= a^2(a+b)^2 + b^2(a+b)^2 + a^2b^2.$

THÉORIE DE L'INVERSION

OU

MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES

par M. Cochez.

(*Fin*, voir page 3.)

Transformation des angles.

XXIII. **Théorème fondamental.** — *Lorsque deux courbes se coupent sous un angle quelconque, les courbes inverses se coupent sous le même angle.*

Nous démontrerons d'abord ce théorème dans le cas particulier où l'une des figures données est une droite OA passant par le pôle et l'autre une courbe quelconque.

Soit AB une sécante à la courbe donnée; la droite *ab* qui joint les points réciproques des points A et B est une sécante à la figure inverse. Nous avons démontré (I) que les droites AB et *ab* sont antiparallèles. Lorsque l'on fait tourner la sécante AB autour du point A jusqu'à devenir tangente à la courbe donnée, cette propriété subsiste et la sécante *ab* devient en même temps tangente au point *a* à la figure inverse. Par conséquent, les tangentes à deux courbes inverses en deux points réciproques sont antiparallèles, c'est-à-dire font avec le rayon vecteur commun et de part et d'autre de ce rayon vecteur des angles égaux.

Il est facile de passer de là au cas de deux courbes quelconques.

Soit A un de leurs points d'intersection. Les courbes inverses se coupent en *a*. Les angles des tangentes au point A des deux courbes données avec le rayon *o*A sont respectivement égaux aux angles que les tangentes au point *a* des courbes inverses font avec le rayon vecteur *oa*. On en déduit aisément que l'angle des tangentes au point A est égal à celui des tangentes au point *a*.

XXIV. — Le théorème du numéro précédent subsiste encore, dans l'espace, lorsque l'on considère deux courbes quelconques planes ou gauches passant par le point A et les courbes inverses correspondantes passant par le point *a*.

En effet, soient AT et AT′ les tangentes menées par le point A aux deux courbes données, *at*, *at′* les tangentes menées par le point *a* aux courbes inverses. Les lignes AT et *at* sont dans le même plan passant par OA, et les lignes AT′, *at′* sont dans un autre plan passant aussi par OA. On fera voir comme précédemment que les angles OAT, O*at* sont égaux, ainsi que les angles OAT′, O*at′*. Les deux trièdres A.TT′O, *a.tt′*O ont un angle dièdre égal A*a* compris entre deux faces égales chacune à chacune; ces deux dièdres sont donc symétriques; par conséquent, les troisièmes faces TAT′, *tat′* sont respectivement égales entre elles; c.q.f.d.

XXV. **Théorème.** — *L'angle de deux surfaces* S *et* S_1, *en un point quelconque* A *de leur intersection* AB, *est égal à l'angle sous lequel les surfaces inverses* s *et* s_1 *se coupent au point réciproque* a.

En effet, menons par le point d'intersection A des deux surfaces données, et, sur chacune d'elles, deux courbes quelconques perpendiculaires à l'intersection commune AB. Dans l'inversion, ces deux lignes deviennent deux lignes situées sur les surfaces *s* et s_1, et qui rencontrent à angle droit l'intersection commune *ab;* de plus, l'angle de ces deux courbes inverses est égal à l'angle des deux premières; ces deux angles mesurent d'ailleurs respectivement l'inclinaison mutuelle des deux surfaces *s* et s_1 au point *a* et des surfaces S et S_1 au point correspondant A; c.q.f.d.

XXVI. — Cette propriété de conserver l'égalité des angles, dont jouit ce mode de transformation des figures, est très-importante et trouve son application dans les projections stéréographiques; en effet, elle entraîne la similitude des triangles infiniment petits. Ce rapport de similitude varie cependant d'un lieu à un autre.

En général, on appelle transformation *isogonale* toute transformation d'une figure géométrique dans laquelle les angles des lignes de la figure primitive se trouvent conservés dans la figure transformée.

La *symétrie* par rapport à un point ou par rapport à une droite, l'*homothétie* et l'*inversion* sont les cas les plus simples de la transformation isogonale.

Il résulte de ce théorème fondamental que toutes les propriétés concernant les angles des triangles et des polygones s'appliquent à tous les triangles et à tous les polygones curvilignes formés par des circonférences passant toutes par un même point O. Car, en prenant ce point pour pôle d'inversion, ces polygones curvilignes deviennent des polygones dont les côtés sont des lignes droites. Ainsi :

La somme des angles d'un triangle curviligne dont les côtés sont des arcs de cercles qui se croisent en un même point est égale à deux angles droits.

On aurait un théorème analogue pour la somme des angles d'un polygone. Voici celui qui correspond au théorème des bissectrices.

Dans tout triangle curviligne dont les côtés sont des arcs de cercles passant par un même point O, *les trois cercles passant par ce point* O *et divisant les angles du triangle en deux parties égales concourent en un autre point.*

Le théorème sur les trois hauteurs d'un triangle rectiligne donne lieu à un théorème analogue dans le cas d'un triangle curviligne dont les côtés sont des arcs de cercles passant par un même point.

De la projection stéréographique.

XXVII. Soit une sphère de centre *s*, O un point quelconque de la sphère, et S le point diamétralement opposé. Prenons pour *point de vue* le point O, et pour plan de projection ou *tableau*, le grand cercle de la sphère ayant ce point pour pôle.

Soit M un point quelconque de la surface de la sphère et *m* l'intersection de la droite OM avec le tableau. Le

point m est dit la *perspective* ou *projection stéréographique* du point M.

Cette méthode était connue des Grecs; Ptolémée l'a décrite dans l'*Almageste* sous le nom de *planisphère*. Les auteurs du moyen âge l'appelaient *astrolabe*.

Si l'on joint MS et ms, les angles en M et en s sont droits; par suite, le quadrilatère MSsm est inscriptible et l'on a

$$OM \cdot Om = OS \cdot os.$$

Par conséquent, la projection stéréographique de la surface de la sphère sur le plan d'un grand cercle peut être considérée comme l'inversion de cette surface, lorsque l'on prend pour pôle le point de vue, et pour module d'inversion le double du carré du rayon. De là résultent immédiatement les propriétés suivantes que l'on utilise dans la construction des *mappemondes* ou des cartes géographiques sur lesquelles les deux hémisphères sont représentés en entier.

1° Les projections stéréographiques de deux lignes tracées sur la sphère se coupent sous le même angle que ces lignes elles-mêmes.

2° La projection stéréographique d'un cercle quelconque de la sphère est un cercle; en particulier, les systèmes des méridiens et des parallèles se projetteront stéréographiquement suivant deux systèmes de cercles se coupant à angle droit.

3° Les projections stéréographiques des méridiens passent par deux points fixes qui sont les projections stéréographiques des deux pôles.

4° Les parallèles se projettent suivant des cercles coupant orthogonalement les précédents; par conséquent, ils ont leurs centres sur la ligne qui joint les projections des deux pôles.

5° Si l'on considère sur la sphère un triangle très-petit MM'M'', il aura pour projection stéréographique un triangle semblable $mm'm''$. Le rapport de similitude est égal à $\frac{mm'}{MM'}$. On a d'ailleurs, en désignant par R le rayon de la sphère (XVIII) $mm' = 2R^2 \frac{MM'}{OM \cdot OM'}$,

ou, sensiblement $\frac{mm'}{MM'} = \frac{2R^2}{OM^2}$;

par conséquent; le rapport de similitude varie, en chaque point, en raison inverse du carré de la distance du pôle au point correspondant sur la surface de la sphère. Ce rapport est égal à $\frac{1}{2}$ pour les régions voisines des points diamétralement opposés au pôle, et égal à 1 pour les régions situées dans le voisinage du plan du tableau.

Nous observerons encore que l'aire de la mappemonde est la moitié de l'aire de l'hémisphère qu'elle représente et dont elle est la base.

On a l'habitude de prendre pour plan du tableau le méridien qui divise la sphère en *ancien* et *nouveau monde.* On prend aussi quelquefois le plan du grand cercle de la sphère qui laisse presque toutes les terres d'un côté, et presque toutes les mers de l'autre côté.

ÉTUDE SUR LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE

par F. R. A.

(*Suite*, voir page 12.)

IV. *Utilité de la notion et du signe de la 7me opération.*

Nous rappellerons ici la question particulière qui a donné lieu, vers 1843, à nos recherches sur la septième opération de l'Arithmétique.

Considérons une progression géométrique quelconque, par exemple la suivante, qui a 6 termes :

$$\div\div\ 3\quad 6\quad 12\quad 24\quad 48\quad 96,$$

Appelons p le premier terme, d le dernier terme, r la raison, qui est ici 2, et n le nombre des termes.

On a $p = 3$, $d = 96$, $r = 2$, et $n = 6$.

Chacun de ces quatre nombres étant une dépendance, une *fonction* des trois autres, il est utile et intéressant de pouvoir exprimer séparément les quatre fonctions.

On sait que, *dans toute progression géométrique, le dernier terme égale le produit du premier terme par la raison élevée à la puissance qu'indique le nombre des termes moins un.* On a donc la relation $d = pr^{n-1}$.

On isole p en divisant les deux membres de cette égalité par r^{n-1}, ce qui donne :

$$p = \frac{d}{r^{n-1}}.$$

Pour isoler r, on revient à la première formule; on divise les deux membres par p, après quoi on extrait la racine du degré $n - 1$; cela donne

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{d}{p}}.$$

Habituellement, on s'arrête là dans l'isolement successif des symboles, et l'on donne pour motif que l'exposant $n - 1$ ne peut s'isoler que moyennant l'emploi des *logarithmes*. Mais avec la notion et le signe de l'exponentation, nous arriverons directement à l'expression de n en fonction des valeurs p, d, r.

Reprenons la première relation, $d = pr^{n-1}$, et divisons les deux membres par p; il vient :

$$\frac{d}{p} = r^{n-1}.$$

L'exposant $n - 1$, indiquant combien de fois r est facteur dans d/p, égale le nombre de divisions successives que l'on peut faire de d/p par r; nous poserons donc, en employant les signes convenus :

$$n - 1 = \frac{d}{p} \text{ (:) } r \text{ *}.$$

Augmentons les deux membres de 1, nous aurons:

$$n = 1 + \frac{d}{p} \text{ (:) } r.$$

Telle est l'expression de n en fonction de d, p et r.

En appliquant cette formule au cas de la progression donnée plus haut, nous aurons :

* $n - 1$ égale d sur p exponenté par r.

$$n = 1 + \frac{96}{3} (:) 2 = 1 + 32 (:) 2 = 1 + 5 = 6$$

Voici le calcul de l'exponentation de 32 par 2 :

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Toutes les fois que l'exposant que l'on cherche est un nombre entier (et c'est le cas des progressions), l'opération est très-simple.

Mais si l'on prend au hasard un nombre quelconque comme *puissance* et un autre comme *racine*, l'exposant est généralement un *nombre fractionnaire*, ou même un *nombre incommensurable*; le calcul se complique, mais il est encore possible, et il est bien plus abordable que le calcul direct des racines.

Dès lors, non-seulement on peut se passer des logarithmes pour calculer les exposants, mais on peut se servir de l'exponentation pour calculer les logarithmes, en prenant immédiatement et isolément tel nombre que l'on voudra. On en verra des exemples plus loin.

(*A suivre.*)

REMARQUES

SUR

L'ENSEIGNEMENT DE LA TRIGONOMÉTRIE

par J. Hoüel.

I

La Trigonométrie peut être enseignée à deux points de vue différents, dont le mode habituel d'exposition de cette science est un mélange où nous ne retrouvons ni la simplicité de l'un, ni la fécondité de l'autre.

On peut, suivant l'esprit de l'ancienne Géométrie, définir le sinus, le cosinus, la tangente, etc. comme les rapports

deux à deux des côtés d'un triangle rectangle, ce qui restreint d'abord ces définitions au cas de l'angle aigu. On fait voir ensuite comment le besoin de généraliser certaines formules relatives au calcul des triangles peut conduire à donner des sinus, des cosinus, etc. aux angles obtus, et enfin comment des problèmes analogues à ceux de l'Astronomie mènent à une nouvelle généralisation, s'étendant aux angles compris entre deux et quatre quadrants, et finalement aux angles de grandeur quelconque, positifs ou négatifs.

Cette méthode, essentiellement synthétique, a l'inconvénient de ne pas éclairer sur la nature des quantités négatives, qui se présentent ici comme de purs symboles algébriques. De plus, elle ne prépare pas l'esprit aux conceptions, plus générales, de la Géométrie analytique, dont la Goniométrie n'est pourtant qu'un cas particulier.

Il y aurait, croyons-nous, un avantage notable à se placer tout d'abord au point de vue de la méthode cartésienne. La Goniométrie, ainsi présentée, prendrait une forme plus simple et plus intuitive. Elle offrirait un premier exemple de la discussion des coordonnées des points d'une courbe ; on pourrait la prendre comme point de départ pour l'explication de la vraie théorie des quantités négatives, et cette explication serait bien plus lumineuse que celle que l'on développe dans la plupart des Traités d'Algèbre, en prenant pour texte le fameux problème des courriers.

On commencerait par remarquer que la direction d'un rayon mobile autour d'un point fixe est déterminée quand on connaît le point où ce rayon coupe une circonférence quelconque, décrite du point fixe comme centre, et dont on peut supposer, pour plus de simplicité, le rayon égal à l'unité de longueur. On détermine, en même temps que cette direction, l'angle que fait le rayon mobile avec un rayon fixe du cercle, rayon que nous appellerons *l'origine des angles*, comme nous appellerons son intersection avec la circonférence *l'origine des arcs*.

Deux angles qui diffèrent entre eux d'un nombre entier de *tours*, parcourus soit dans le sens *direct*, soit dans le

sens *rétrogradé*, sont déterminés par le même point du cercle. Il suffit donc, pour déterminer toutes les directions possibles, de savoir déterminer tous les angles compris entre zéro et quatre angles droits.

On y parvient par la connaissance des projections du point correspondant de la circonférence sur le diamètre origine des angles ou *axe horizontal*, et sur un diamètre ou *axe vertical*, perpendiculaire au premier. Pour fixer chacune de ces projections, il suffit de déterminer sa position relativement au centre.

Concevons un point partant du centre et marchant d'abord sur l'axe horizontal, par exemple, vers l'origine des arcs. Les chemins parcourus successivement dans ce sens *s'ajouteront*, suivant la signification *arithmétique* de ce mot. Si, après avoir parcouru une certaine partie du rayon du cercle, le point se met à marcher dans le sens opposé, sa distance au centre sera *diminuée* (arithmétiquement) de la quantité dont ce point aura reculé, aussi longtemps du moins que le point n'aura pas atteint de nouveau le centre. Lorsque le point atteint le centre et le dépasse (se trouvant alors sur le *prolongement* de l'origine des angles), la distance recommence à croître, mais en sens opposé. De là une complication des divers cas qui peuvent se présenter, lorsqu'on veut comparer entre elles des positions du point non situées toutes les deux sur la direction même de l'origine des axes. Il faut, dans ce cas, avoir égard à la fois à la grandeur de la distance et au sens dans lequel elle doit être portée.

On évitera cette complication en cessant de séparer les deux notions de *grandeur* et de *sens* des chemins parcourus, et les incorporant en une seule par une généralisation des définitions de l'addition et de la soustraction.

Nous appellerons *addition* d'une distance l'opération qui consiste à déplacer un point mobile de cette distance, dans un sens convenu, vers la droite, par exemple. Nous appellerons de même *soustraction* d'une distance l'opération (inverse de la précédente) qui consiste à déplacer le point de cette distance dans le sens contraire, soit vers la gauche. D'après cela, l'origine correspondant à une distance égale à *zéro*;

toute distance *a* comptée à droite de l'origine sera $0 + a$, ou simplement $+ a$, ou a; toute distante *a* comptée à gauche sera $0 - a$, ou simplement $- a$.

Une discussion très-simple conduit aux règles de l'addition et de la soustraction des polynômes algébriques.

On appliquera de même la notion de signe aux distances comptées sur l'axe vertical.

Cela posé, tout point du cercle est déterminé par les deux distances au centre de ses deux projections sur les axes, distances données en grandeur et en signe, ou simplement par la distance en grandeur et en signe de l'une des projections et par le signe de l'autre distance, les grandeurs des deux distances étant liées entre elles par la condition que la somme de leurs carrés soit égale à l'unité. Ces deux distances s'appellent les *coordonnées* du point du cercle, et on les distingue par les noms de *cosinus* et de *sinus*.

Le rapport des deux coordonnées est représenté, à l'aide d'une construction simple, par un point de la tangente au cercle menée à l'origine des arcs, et ce point se trouve au-dessus ou au-dessous de l'axe horizontal, suivant que les deux coordonnées sont de même signe ou de signe contraire. En donnant un signe à la distance de ce point à l'origine des arcs, comme on l'a fait pour les distances comptées sur les deux axes, et en ayant égard à la corrélation qui existe entre la position du point et les signes des coordonnées, on arrive à la règle des signes pour la division, et par suite pour la multiplication. De même pour le rapport inverse (cotangente) et pour les inverses du cosinus et du sinus.

La projection d'une longueur sur un axe quelconque étant déterminée en grandeur et en direction par le produit de la ligne par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec la partie positive de l'axe, on obtient immédiatement les formules pour le cosinus et le sinus de la somme de deux angles, et par suite toutes les autres formules goniométriques et leur application à la mesure des triangles, sans qu'il y ait lieu à nouvelle discussion. *(A suivre.)*

CONCOURS GÉNÉRAUX.

CONCOURS DE 1859.

Classe de troisième (sciences).

Étant données 4 droites dans un plan, on propose de mener une parallèle à la première de façon que les segments déterminés par les trois autres sur cette parallèle soient entre eux comme deux longueurs données *a* et *b*.

Classe de seconde (sciences).

On donne une droite indéfinie AB et une droite PQ perpendiculaire à AB terminée aux points P et Q situés du même côté de AB. Connaissant les distances des points P et Q au point O, où PQ prolongé rencontre AB, calculer l'angle sous lequel PQ est vu d'un point donné de AB.

On demande de déterminer sur AB un point tel que PQ soit vu de ce point sous un angle donné; le problème s'il est possible a au moins quatre solutions.

Il y a exception lorsque l'angle donné est l'angle maximum sous lequel PQ puisse être vue d'un point de AB. Il y a dans ce cas deux solutions.

Trouver la valeur de l'angle maximum dont on vient de parler. Donner une construction géométrique qui détermine le point de AB duquel la ligne donnée est vue sous l'angle maximum.

Trouver quelle relation doit exister entre OP et OQ pour que l'angle maximum soit de 30° ou $\frac{\pi}{6}$.

Classe de logique (lettres).

On a trois sphères ayant respectivement pour diamètres,

0,183, 0,215, 0,511.

Quel devrait être le rayon de la base d'un cône de 0,32 de hauteur pour que son volume fût équivalent à la somme des trois sphères?

Classe de rhétorique (sciences).

Par le point de contact de deux circonférences données, on mène deux cordes AB et AD, qui sont dans un rapport donné, et des centres O et C on abaisse des perpendiculaires sur ces cordes.

On demande le lien géométrique du point de rencontre M de ces perpendiculaires.

Classe de logique (sciences).

Sur un cercle donné O on prend à volonté un arc ANB et sur la corde AB de cet arc, on décrit une demi-circonférence AMB ; puis on fait tourner la figure autour du diamètre perpendiculaire à AB.

On demande quelle doit être la corde pour que la somme des surfaces décrites par les lignes AMB, ANB soit maximum.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE POITIERS.

Sessions de 1874.

Exprimer le volume engendré par un segment de cercle tournant autour d'un diamètre connaissant l'angle au centre α qui intercepte, l'arc du segment, la perpendiculaire h abaissée du centre sur la corde et l'angle β de cette perpendiculaire avec le diamètre autour duquel s'effectue la rotation.

— Trouver au moyen de la géométrie élémentaire la formule qui exprime le côté du dodécagone régulier circonscrit à un cercle de rayon R; trouver l'expression de ce même côté au moyen de la trigonométrie et faire le calcul en prenant $R = 0^m,045$.

— La distance des foyers d'une ellipse étant $2c$, les rayons vecteurs étant r et r', à quelle distance du centre la normale vient-elle couper l'axe focal?

— Trouver l'arc x déterminé par l'équation

$$\text{Cos } 2x = 4 \cos x.$$

— Calculer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la surface m^2 et le périmètre $2p$. — Discussion.

— Simplifier et résoudre l'équation

$$\frac{x}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2x-3}{x-1} + \frac{3x-1}{2(x-1)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2+2}{3x-2}.$$

— On donne le volume a^3 et la surface b^2 d'une pyramide régulière à base triangulaire, et l'on demande de calculer le côté de la base et la hauteur de la pyramide. — Discussion.

— Combien les nombres 2700, 2160 et 3780 ont-ils de diviseurs communs? quel est leur plus petit commun multiple?

— Le rayon d'une circonférence est $320^m,053$. Une corde a pour longueur $437^m,342$. Calculer la distance de la corde au centre et la longueur de l'arc soustendu (1).

— Un hexagone régulier dont le rayon est a tourne autour de l'un de ses côtés. Donner les expressions du volume engendré, de la surface engendrée, de l'aire de l'hexagone, et chercher la quatrième proportionnelle à ces trois quantités.

— Calculer à 0,001 près le produit $(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})$.

— Un triangle isoscèle tourne successivement autour de sa base b et autour de son côté c. Trouver les volumes engendrés en fonction de b et de c, et le rapport de ces volumes. Dans quel cas seront-ils égaux?

— Trois forces sont en équilibre. Leurs intensités sont proportionnelles à $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5-\sqrt{6}}$. Quels sont les angles de ces forces en degrés, minutes et secondes?

— Un triangle isoscèle tourne autour d'une droite menée par le sommet dans son plan. Calculer la surface totale et le volume engendrés. On connaît la hauteur h, le demi-angle au sommet α et l'angle ω de la hauteur avec l'axe.

---

(1) Question mal choisie. Les membres ont trop de figures et on aurait dû indiquer l'approximation du résultat final. J. B.

— Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit. Entre quelles limites peut varier le rayon quand l'hypoténuse reste fixe?

— Quelle est la somme des 81 nombres contenus dans la table de multiplication ?

— On donne les côtés d'un triangle isoscèle. Trouver la formule qui exprime le rayon du cercle inscrit.

— Les médianes d'un triangle représentent trois forces. Montrer qu'elles sont en équilibre.

Enseignement spécial. — Diplôme d'études 1874.

— Trouver les angles dièdres formés par les faces d'une pyramide. Longueur des arêtes :

SA = 40^{mm}	SB = 63^{mm}	SC = 50^{mm}
BC = 50^{mm}	CA = 45^{mm}	AB = 40^{mm}

— Construire les projections d'un cube dont la base repose sur un plan donné. — La trace horizontale du plan fait avec la ligne de terre un angle de 60°; la trace horizontale fait avec la même ligne de terre un angle de 30°. L'un des côtés de la base est parallèle à la trace horizontale et en est à une distance de 1 centimètre. Le cube a pour arête 2 centimètres.

— Un prisme droit dont l'une des faces latérales est dans le plan horizontal a pour base un pentagone régulier dont le rayon est 15 millimètres et dont le plan fait avec le plan vertical un angle de 60°. Construire les projections du prisme, les projections et la vraie grandeur de la section perpendiculaire au plan horizontal et faisant avec la ligne de terre un angle de 45°. Arête de base du prisme : 4 centimètres.

Sessions de 1875.

— On donne le côté AB = m et l'angle A = 2α d'un losange ABCD. On fait tourner ce losange successivement autour : 1° de la diagonale AC; 2° de la diagonale BD; 3° du côté AB. On demande le volume et la surface décrits respectivement par l'aire et le périmètre du losange dans chacun de ces trois cas. On étudiera la variation de ce volume et de cette surface lorsque, m restant constant, α varie de toutes les manières possibles.

— On donne le côté a d'un triangle équilatéral. On mène des parallèles aux côtés de ce triangle à une même distance x entre chaque côté et le centre du triangle. On décompose ainsi le triangle en trois trapèzes, trois parallélogrammes et un triangle. On demande d'exprimer ces surfaces en fonction de x et d'étudier leur variation lorsque x varie.

— On donne un cercle de rayon OA = r, et un point fixe P à une distance a du centre. Un point mobile M décrit la circonférence OA. On demande pour chaque position de M, définie par l'angle MOP = x, l'expression du volume que décrirait le triangle MOP en tournant autour de OP. Maximum de ce triangle.

— Connaissant le rayon du cercle inscrit dans un octogone régulier, calculer la surface et le volume du corps engendré par la rotation de ce polygone autour d'une droite menée par le centre parallèlement à l'un des côtés.

— Résoudre l'équation $2\text{tg}\, 2x = 5\text{tg}\, x$, et calculer la valeur numérique de $\cos 4x$.

— Rendre calculable par logarithmes au moyen d'un angle auxiliaire l'expression $\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$. Appliquer au cas où l'on a $a = 113$; $b = 335$.

— L'hypoténuse d'un triangle rectangle a pour longueur 5640m,25. L'un des angles aigus est de 42°23'18",33. Calculer la longueur du rayon du cercle inscrit. (1)

— La surface du triangle rectangle générateur d'un cône est $2a^2$. La surface totale du cône est πb^2. Trouver le rayon de la base et la hauteur. — Discussion.

— Quelle serait la raison d'une progression géométrique dont 10 et 100 seraient les termes extrêmes et qui aurait 10 termes en tout?

— Démontrer que toute puissance impaire de 7, augmentée d'une unité, donne un multiple de 8.

— Un cylindre indéfini de rayon r a pour axe un diamètre d'une sphère de rayon R. Trouver le volume de la partie de la sphère qui reste en dehors du cylindre. Trouver le rayon d'une sphère équivalente.

— Circonscrire à une sphère un cône de volume minimum.

— Circonscrire à un cylindre de rayon a et de base b un cône de surface latérale minima.

— Inscrire dans un cercle un triangle isoscèle, connaissant la somme de la base et de la hauteur. — Entre quelles limites peut varier la somme donnée?

MELANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le **docteur Henri Suter**, de **Zürich**, traduite par M. A.-G. MELON.

Suite. Voir Tome II, page 25.

LA SCIENCE CHEZ LES GRECS.

Son importation. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie.

Thalès, après son retour d'Égypte, fonda l'École ionienne. Ses élèves immédiats, les plus distingués du reste, sont *Anaximandre* et *Anaximène*, qui brillèrent vers le milieu du VIe siècle avant J.-C. Nous ne connaissons que peu de chose relativement aux découvertes géométriques de ces philosophes; ils se préoccupèrent surtout de développer leur système philosophique. Leurs théories d'astronomie physique sur l'édifice du monde nous ont été transmises assez

(1) Question conforme au programme universitaire, mais absurde au point de vue pratique, car les centièmes de seconde n'existent pas. Il aurait fallu d'ailleurs indiquer l'approximation du résultat. J. B.

complétement. — Le premier enseignait, selon *Diogène Laërce*, que la Terre repose au centre de l'univers, qu'elle a une forme sphérique; en outre, d'après ce système, la Lune recevait sa lumière du Soleil, et le Soleil était une masse enflammée au moins aussi grosse que la Terre. Il aurait aussi découvert le gnomon, et il aurait le premier construit un cadran solaire. C'est lui aussi qui aurait représenté la sphère céleste sur un globe. *Anaximandre* développa donc les théories de son prédécesseur et il perfectionna particulièrement les moyens auxiliaires de l'astronomie pratique par l'invention du gnomon et des cartes astronomiques. Il faut admettre cependant que les Égyptiens devaient déjà connaître un instrument aussi primitif que le gnomon. *Hérodote* dit (livre II, ch. 109) : « Les Hellènes apprirent des Babyloniens le cadran solaire, le gnomon et les 12 parties du jour. » Il va sans dire qu'on ne peut pas faire grand fond sur de telles indications. Seulement elles servent à dépouiller de toute autorité d'autres passages déjà douteux. Il serait par conséquent peut-être plus exact d'attribuer à *Anaximandre* la simple importation du gnomon au lieu de lui en attribuer l'invention.

Anaximène était élève d'*Anaximandre*. *Pline* (*Hist. nat.* livre II) le désigne comme l'inventeur du gnomon et des cadrans solaires; mais il le confond vraisemblablement avec *Anaximandre*. On ne possède pas d'autres données sur les productions mathématiques d'*Anaximène*. Nous ne sommes aussi que fort peu renseignés sur *Anaxagore* élève d'Anaximène, qui vivait vers l'année 460 avant J.-C. Tout ce que nous en savons, c'est que, d'après *Plutarque* (*De Exilio*, chap. 17), il se serait occupé, en prison, de la quadrature du cercle. Ses opinions philosophiques sur la structure de l'édifice du monde paraissent accuser l'influence des théories de Pythagore, qui régnaient alors. Les paroles que *Diogène Laërce* lui attribue au sujet des étoiles sont particulièrement intéressantes. « Elles sont, dit-il, composées de pierres; mais ces pierres ne tombent pas sur la terre, parce qu'elles sont entraînées dans un rapide mouvement circulaire. » — Qui ne reconnaîtrait là les premières traces de la

connaissance de cette force qui, tant d'années plus tard et grâce à l'immortel *Newton*, est devenue, en se combinant avec la pesanteur, le principe des mouvements du système du monde!

A peu près à la même époque que *Anaxagore*, vivait le mathématicien *Œnopides*, de Chios. Selon *Proclus* et selon *Eudemus*, *Œnopides* serait l'inventeur des deux problèmes élémentaires: D'un point pris hors d'une droite mener la perpendiculaire sur cette droite, et faire avec une droite un angle donné. — Si les indications de *Eudemus* étaient exactes, nous serions forcés de convenir que la géométrie était à cette époque, très-peu avancée. Mais, comme *Pythagore* florissait avant le milieu du ve siècle, par conséquent avant Œnopides, nous devons considérer ces indications d'*Eudemus* comme inexactes ou faire vivre le mathématicien Œnopides à une époque encore bien plus éloignée de nous.

Les découvertes et les théories déjà mentionnées de l'École *ionienne* se développèrent parmi les disciples de l'École *italique* fondée par *Pythagore*. Cet homme célèbre naquit à Samos, en l'année 570 avant J.-C. Son premier maître fut *Phérécyde*, de *Syros*. Pythagore connaissait aussi Thalès; sur les conseils de ce dernier, il se rendit en Égypte, et même il serait allé de là à Babylone et dans l'Inde. Pourvu d'abondantes connaissances, il retourna dans sa patrie pour la quitter immédiatement: car, sous la tyrannie parvenue à son apogée en ce pays, il ne trouvait pas un terrain favorable à ses doctrines philosophiques et il se rendit à Crotone, dans la basse Italie. Là, en peu de temps, il amena à un haut degré de prospérité cette école à laquelle nous devons des progrès si considérables dans les mathématiques et dans les sciences naturelles.

Les travaux mathématiques de l'École de Pythagore se rattachent intimement à ses principes philosophiques. Par leur tendance mystique à chercher dans les propriétés des grandeurs abstraites l'explication des phénomènes de la nature. les pythagoriciens furent conduits à une conception des mathématiques plus scientifique et plus haute que celle de l'Ecole ionienne, ainsi qu'à une direction plus pratique

et plus féconde. C'est ce que nous dit aussi *Proclus* dans la courte notice historique de son Commentaire d'Euclide : « D'après eux (Thalès, etc.), Pythagore donna à la branche du savoir humain comprise sous la dénomination de mathématiques la forme d'une science plus libre, en en considérant les principes à un point de vue plus élevé et en en étudiant les théorèmes au point de vue intellectuel (νοέρως) et immatériel (αὔλως). » Nous pouvons considérer comme une émanation spéciale de ce côté mystérieux de la philosophie de *Pythagore* les résultats que l'arithmétique doit à cette école. Il est vrai que ces vaines spéculations sur les nombres complets et sur les nombres incomplets, sur les nombres pyramidaux et les nombres polygonaux, ainsi que toutes les divisions que leur fantaisie avait imaginées, n'avaient aucune base véritablement scientifique et même, sous un certain rapport, ternissent l'éclat des mérites de cette école de mathématiciens. Toutefois il faut reconnaître qu'ils posaient les bases d'une nouvelle science.

Les Grecs divisaient l'arithmétique en arithmétique pure (ἀριθμητική) et en art pratique du calcul (λογιστική). La première, que nous nommons aujourd'hui science des nombres ou théorie des nombres, doit à Pythagore ses premiers développements. Il est possible que Pythagore en ait emprunté les principes aux Babyloniens ou aux Égyptiens, mais, quoi qu'il en soit, il est le premier Grec auquel nous puissions attribuer la connaissance des proportions et des progressions. Il distingua trois sortes de proportions : la proportion arithmétique, la proportion géométrique et la proportion harmonique, qui sont aujourd'hui encore connues sous ces mêmes dénominations. Quant aux progressions, il ne connaissait vraisemblablement que les progressions arithmétiques qui offraient un vaste champ à ses spéculations sur les nombres.

Cette proposition : « La somme des n premiers nombres impairs égale le carré du nombre entier n », fournit à *Pythagore*, comme nous le voyons dans *Proclus*, un moyen de former des triangles rectangles rationnels. Voici la règle : on prend un nombre impair pour

le plus petit côté de l'angle droit du triangle rectangle; du carré de ce nombre impair on retranche l'unité et on divise le reste par 2; on obtient ainsi le plus grand côté de l'angle droit; on ajoute à ce résultat l'unité et on trouve l'hypoténuse (1).

D'autres progressions arithmétiques fourniront les diverses espèces de nombres polygonaux par le procédé qui avait donné les nombres carrés.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE DIJON. 1874.

Solution par M. Jenin, élève du Lycée de Nancy.

Couper un cube par un plan suivant un hexagone équiangle dont deux côtés consécutifs soient dans le rapport de 1 *à* 2.

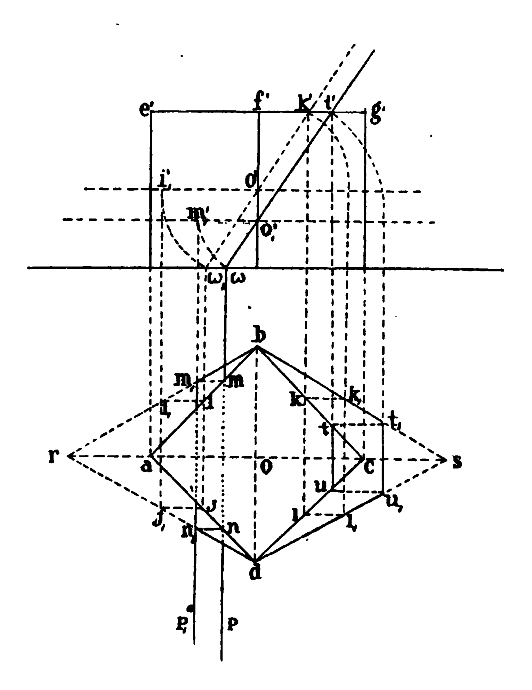
Un plan coupant un cube suivant un hexagone doit rencontrer six arêtes. On sait qu'un plan P_1 passant par le centre O du cube et par les milieux de deux arêtes consécutives AB, AD d'une face ABCD, coupe le cube suivant un hexagone régulier, et qu'il est perpendiculaire à la diagonale joignant les sommets non adjacents aux arêtes coupées. Or, un plan P parallèle au plan P_1 et coupant les six arêtes, donne un hexagone équiangle de celui déterminé par P_1. Prouvons qu'un plan P, parallèle à P_1 passant par un point M de l'arête AB, tel que $\frac{MA}{MB} = \frac{p}{q}$, coupe le cube suivant un hexagone équiangle dont les côtés consécutifs sont dans le rapport $\frac{p}{q}$. Pour cela, posons le cube par la face ABCD sur

(1) Plus petit côté de l'angle droit $[2n + 1]$,
plus grand côté de l'angle droit

$$\frac{(2n + 1)^2 - 1}{2} = 2n\,(n + 1).$$

Hypoténuse $[2n\,(n + 1) + 1.]$

On vérifie aisément que le carré de l'hypoténuse = la somme des carrés des deux autres côtés.



le plan horizontal de sorte que la diagonale EC soit parallèle au plan vertical. Menons le plan $P_1\omega_1 P'_1$ coupant le cube suivant un hexagone régulier. Faisons-le tourner autour de sa diagonale *bd*, *o'* pour l'amener à être parallèle au plan horizontal et l'y projeter en vraie grandeur suivant l'hexagone régulier $i_1\ bk_1\ l_1\ dj_1$. En prolongeant les côtés aboutissant en *b* et *d*, on obtient le losange *brds*, formé de deux triangles équilatéraux dont le côté égale *bd*. Un plan sécant $P\omega P'$, parallèle à $P_1\omega_1 P'_1$ et passant par le point M, coupe le cube suivant un hexagone équiangle projeté en $\omega o'_1 t'$, *mbtudn*. Cette section, après avoir tourné autour de sa diagonale *bd*, o'_1, pour devenir parallèle au plan horizontal, s'y projette en vraie grandeur en $mbt_1u_1dn_1$; de plus, ses angles, aux extrémités de sa diagonale *bd*, o_1', ont leurs côtés parallèles à ceux de l'hexagone régulier aux extrémités de sa diagonale *bd*, *o'*; ces deux diagonales ayant la même projection horizontale, il en est de même des côtés des angles aux sommets desquels elles aboutissent; par suite, quatre côtés de l'hexagone que détermine le plan $P\omega P'$ se projettent en vraie grandeur, à partir de *b* et *d* sur les côtés du losange *bsdr*.

Or, $$\frac{p}{p+q}=\frac{mn}{bd}=\frac{m_1n_1}{bd}$$

donc, $$\frac{p}{q}=\frac{m_1r}{m_1b}=\frac{m_1n_1}{m_1b_1}$$

Or, $$\frac{p}{q}=\frac{ma}{mb}=\frac{\omega a'}{\omega b'}=\frac{t'f'}{t'g'}=\frac{tb}{tc}$$

donc, $$\frac{p}{q}=\frac{t_1b}{t_1s}=\frac{t_1b}{t_1u_1}; \text{ etc.}$$

D'où le rapport de deux côtés consécutifs de l'hexagone équiangle $m_1bt_1u_1dn_1$ est égal au rapport $\frac{p}{q}$, dans lequel le point M divise AB. D'ailleurs, M peut être pris à droite ou à gauche de I ; il y a donc deux solutions données par deux plans perpendiculaires à la diagonale EC du cube. Par suite, le problème admet *huit* solutions. Pour résoudre le problème proposé, il faut donc prendre M tel que $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{1}$ ou qu'il soit au tiers de AB, soit à partir de A, soit à partir de B.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE RENNES 1877.

Solution par M. Demortain, élève à l'École communale de Doullens.

Deux circonférences O *et* O′ *se coupent à angles droits en* A *et* B. *1° Mener une sécante* O′CD *telle que le rapport* $\frac{AC}{AD}$ *soit donné et égal à* K;

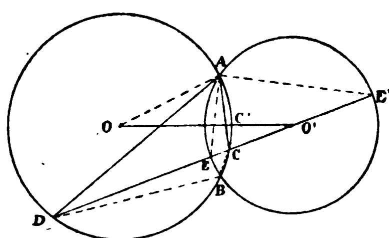
2° Déterminer les différentes valeurs que peut prendre ce rapport;

3° Calculer $\frac{BC}{BD}$;

4° Calculer les angles que fait la sécante O′CD *avec* OO′, OA *et* O′A.

5° Parmi toutes les circonférences orthogonales à O′, *y en a-t-il d'autres que* O *qui donnent lieu à la même droite* O′CD *pour le même rapport* K?

Soient O'CD la sécante et K le rapport $\frac{AC}{AD}$. Les circonférences O et O' étant orthogonales, la droite CD qui passe par le centre O' de l'une d'elles est divisée harmoniquement aux points E et E'. Dès lors, les quatre droites AE', AC, AE et AD forment un faisceau harmonique dans lequel les rayons AE, AE' sont perpendiculaires; donc AE est bissectrice de l'angle



DAC et $$\frac{EC}{ED} = K \qquad (1)$$

mais

$$CO' \times O'D = \overline{O'A}^2 = R'^2 \text{ ou } (R' - EC)(R' + ED) = R'^2 \qquad (2)$$

Des relations (1) et (2) on tire $O'C = K \times R'$.

Pour construire la sécante demandée, il suffira de décrire du centre O' avec O'C pour rayon une circonférence qui coupera généralement la circonférence O en deux points; en les joignant au centre O', on obtiendra deux droites, symétriques, par rapport à la ligne des centres, qui répondront à la question.

2° Si la sécante passe en B, les points D et C venant à se confondre, le rapport $\frac{AC}{AD}$ est égal à l'unité. C'est ce que fait voir aussi la relation $O'C = K \times R'$; O'C étant dans ce cas égal à R'. La plus petite valeur que puisse prendre O'C est O'C'; on a alors $O'C' = OO' - R$ et $K = \frac{OO' - R}{R'}$.

Le côté R' du triangle OAO' étant plus grand que la différence $OO' - R$ des deux autres côtés, on voit que lorsque la sécante devient la ligne des centres, $K < 1$. Le rapport $\frac{AC}{AD}$ peut donc varier de 1 à $\frac{OO' - R}{R'}$.

3° Les points C et D étant réciproques par rapport au cercle O', le rapport des distances d'un point quelconque

de la circonférence O′ à ces deux points est constant; par conséquent,

$$\frac{CB}{BD} = \frac{AC}{AD} = K.$$

4° Dans le triangle ODO′, les trois côtés sont connus; $O'D = \frac{R'}{K}$, $OD = R$, $OO' = \sqrt{R^2 + R'^2}$. On sait donc déterminer l'angle OO′D. La détermination de l'angle DO′A n'offre pas plus de difficulté; il suffira pour le calculer de chercher l'angle OO′A du triangle rectangle OAO′ dont on connaît les côtés et d'ajouter à cet angle l'angle OO′D précédemment obtenu. Quant à l'angle que la sécante fait avec OA, c'est le complément de l'angle DO′A.

5° D'après un théorème connu, toutes les circonférences passant par les points C et D réciproques par rapport au centre O′ coupent orthogonalement la circonférence O′. Les points C, D et E restant fixes, le rapport $\frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD} = K$ reste le même et toutes ces circonférences donnent lieu à la même droite O′CD pour le même rapport K.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE CLERMONT 1875.

1re Question.

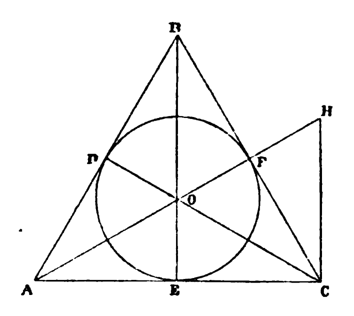
Solution par M. Biette, élève du collége Stanislas.

En désignant par le point O *le centre du cercle inscrit dans le triangle* ABC, *démontrer la relation :*

$$AB \times OC^2 + BC \times OA^2 + AC \times OB^2 = AB \times BC \times AC.$$

La relation que l'on se propose de démontrer peut s'écrire

$$\frac{\overline{OC}^2}{BC \cdot AC} + \frac{\overline{OA}^2}{AB \cdot AC} + \frac{\overline{OB}^2}{AB \cdot BC} = 1$$



Prolongeons OF d'une quantité FH égale à OF et joignons CH. Les triangles rectangles FHC et OEC ayant les côtés de l'angle droit égaux sont égaux; il en résulte que CH = CO, $\widehat{OCH} = \widehat{ACB}$, et que le quadrilatère EOFC est équivalent au triangle OCH.

Les triangles OCH et ABC ayant un angle égal, on a

$$\frac{OCH}{ABC} = \frac{OC \times CH}{AB \times BC}$$

ou

$$\frac{EOFC}{ABC} = \frac{\overline{OC}^2}{BC \times AC}.$$

On aurait de même :

$$\frac{EODA}{ABC} = \frac{\overline{OA}^2}{AB \times AC}$$

$$\frac{DOFB}{ABC} = \frac{\overline{OB}^2}{AB \times BC}.$$

En ajoutant terme à terme, on a

$$\frac{\overline{OC}^2}{AC \times BC} + \frac{\overline{OA}^2}{AB \times AC} + \frac{\overline{OB}^2}{AB \times BC} = \frac{EOFO + EODA + DOFB}{ABC} = 1$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Thual, de Lorient ; Cousin, de Caen.

2e Question.

Solution par M. Cousin, élève du Lycée de Caen.

On donne plusieurs points A, A', A''.... *en ligne droite. Quel est le lieu des points* M *pour lesquels la somme* $\overline{MA}^2 + \overline{MA'}^2 + \dots$ *est constante? Cas du minimum.*

Joignons le point M à un point quelconque O de la droite AA'', point que nous déterminerons dans la suite. Nous aurons

$$MA^2 = MO^2 + AO^2 - 2AO \times OH$$
$$MA'^2 = MO^2 + A'O^2 + 2A'O \times OH$$

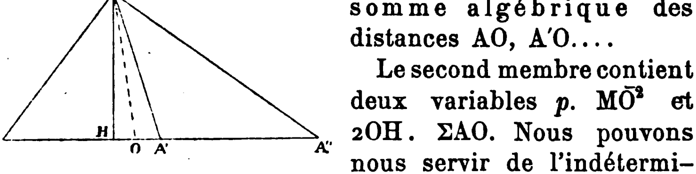
d'où

$$\overline{MA}^2 + \overline{MA'}^2 = 2\overline{MO}^2 + \overline{AO}^2 + A'O + 2OH\,(A'O - AO)$$

et en général

$$\overline{MA}^2 + \overline{MA'}^2 + \overline{MA''}^2 + \ldots = p \cdot \overline{MO}^2 + 2OH\,(A'O - AO + \ldots) + \overline{AO}^2 + \overline{A'O}^2 + \ldots$$

d'où $$\overline{K}^2 = p \cdot \overline{MO}^2 + 2OH \cdot \Sigma AO + \Sigma \overline{AO}^2 \qquad (1)$$



en désignant par ΣAO la somme algébrique des distances AO, A'O....

Le second membre contient deux variables $p.\ \overline{MO}^2$ et $2OH.\ \Sigma AO$. Nous pouvons nous servir de l'indétermination du point O pour rendre nul le produit $2OH\ \Sigma AO$. Ce produit sera nul si O est le centre des moyennes distances ; dès lors l'équation (1) donne

$$\overline{MO}^2 = \frac{\overline{K}^2 - \Sigma \overline{AO}^2}{p} = \text{constante}.$$

Donc le lieu du point M est un cercle décrit du centre des moyennes distances comme centre avec un rayon égal à

$$\sqrt{\frac{K^2 - \Sigma \overline{AO}^2}{p}}.$$

La plus petite valeur que puisse prendre $\overline{MO}^2$ est zéro ; le minimum correspond donc au cas où M est sur la droite; on a alors $\Sigma \overline{MA}^2 = \Sigma \overline{AO}^2$.

Nota. — M. Biette, du collège Stanislas, a résolu la même question.

CONCOURS GÉNÉRAL 1874

Classe de seconde.

Solution par M. Bruyand, élève au Lycée de Troyes.

La différence de deux nombres est a; *la somme de leurs racines carrées est aussi* a; *quels sont ces deux nombres?*

Soient x et y ces deux nombres.

Les équations du problème sont :

$$x - y = a$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$$

Pour résoudre ce système, posons $\sqrt{x} = x'$, $\sqrt{y} = y'$; il se transforme en

$$x'^2 - y'^2 = a$$
$$x' + y' = a.$$

Divisant ces deux équations membre à membre on a

$$x' - y' = 1$$

qui avec (2) donne $x' = \frac{a+1}{2}$. $y' = \frac{a-1}{2}$;

alors $x = \frac{(a+1)^2}{4}$, $y = \frac{(a-1)^2}{4}$.

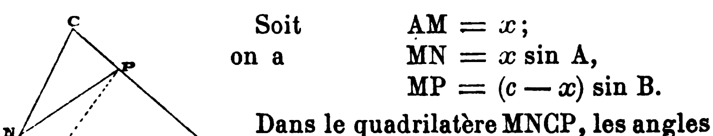
Nota. — Ont résolu la même question MM. Thual, de Lorient; Montenot, de Troyes; Trokay, de Liége.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 57.

Solution par M. Dilhan (Jérôme), du Collége de Saint-Gaudens.

Parmi tous les triangles MNP *que l'on peut former en abaissant d'un point quelconque* M *du côté* AB *d'un triangle* ABC *des perpendiculaires* MN, MP *sur les autres côtés* AC, BC, *quel est celui dont la surface est maxima?* (Arnoye.)



Soit $AM = x$;
on a $MN = x \sin A$,
$MP = (c - x) \sin B$.

Dans le quadrilatère MNCP, les angles C et NMP sont supplémentaires et l'on a

$$\text{surface MNP} = \frac{x\,(c-x) \sin A \sin B}{2} \sin C.$$

MNP sera maximum en même temps que $x\,(c-x)$.

La somme des facteurs étant constante, le produit sera maximum quand ces facteurs seront égaux; on a donc pour déterminer la valeur maxima de x :

$$x = c - x,$$

d'où $$x = \frac{c}{2}.$$

Le point milieu de AB répondra donc à la question.

Nota. — **Ont résolu la même question : MM. Biette, du Havre; Bernard, de Liége; Cordeau, école Lavoisier; Thual, de Lorient; Aubert, de Marseille; Vautré, de Saint-Dié; Pyolle, de Constantine; Coye, à Saint-Étienne; Brice, à la Flèche; Macé, Lebland, Lamy, à Cherbourg; Montenot, Bruyand et Franquet, de Troyes; Demortain à Doullens.**

QUESTION 58.

Solution par M. Vautré, de Saint-Dié.

Les numérateurs de plusieurs fractions égales sont des équimultiples respectivement des quotients trouvés en divisant les dénominateurs par leur plus grand commun diviseur.

(Reynaud.)

Soient les fractions $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \ldots\ldots = \frac{f}{g}$;

Désignons par Δ le plus grand commun diviseur de b, d, ... g, et posons

$$b = \Delta m,\ d = \Delta n,\ \ldots\ldots\ g = \Delta p;$$

les fractions considérées deviennent.

$$\frac{a}{\Delta m} = \frac{c}{\Delta n} = \ldots\ldots = \frac{f}{\Delta n},$$

d'où l'on tire en multipliant par $\Delta\, m.n$ . . . . p supprimant les facteurs communs et séparant les égalités :

$$an = cm \quad (1)$$
$$cp = fn.$$

n étant premier avec m, divise c, à cause de l'égalité (1). On a donc $c = \mathrm{K}n$, K étant entier. Cette valeur substituée dans l'égalité (1) et dans les suivantes donne :

$$a = \mathrm{K}m$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$f = \mathrm{K}p$$

donc $a, c, \ldots f$ sont des équimultiples respectivement de $m, n \ldots p$.

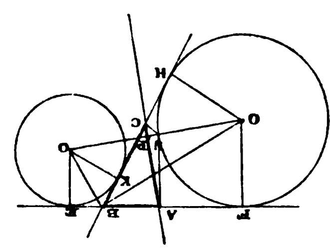
Nota. — Ont résolu la même question, MM. Bernard de Liége; Dilhan (Jérome), de Saint-Gaudens; de Casamajor, de Perpignan; Dalzon à Saint-Étienne; Franquet, à Troyes; Lebland, à Cherbourg; Demortain, à Doullens.

QUESTION 62.

Solution par M. Picaud, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne.

Construire deux cercles connaissant le triangle formé par l'axe radical, une tangente commune intérieure et une tangente commune extérieure. (Weill.)

Supposons le problème résolu. Soient O et O′ les deux cercles cherchés, ABC le triangle donné. La droite OB est bissectrice de l'angle FBH, de même O′B est bissectrice de l'angle KBE. Les points A et C étant sur l'axe radical, on a AF $=$ AE et CH $=$ CK. Par suite, les perpendiculaires élevées sur EF et HK en A et C rencontrent toutes deux OO′ en son milieu N. Les centres des deux cercles cherchés seront donc déterminés par les intersections de la perpendiculaire NP à l'axe radical avec les deux bissectrices OB et BO′.



Nota. — Ont résolu la même question: MM. Biette, du Havre; Perrin, à Clermont; Demortain, à Doullens; J. Dilhan, à Castres; Cottereau, à Châteauroux; Vautré, à Saint-Dié; Montenot, Bruyand, à Troyes; Lamy, Lebland, de Cherbourg.

QUESTION 64.

Solution par M. Westphalen, élève du Lycée du Havre.

Résoudre le système

(1) $$x + y + z = 1$$

(2) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

(3) $$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$$ *(de Longchamps.)*

Des équations (1) et (2) on tire :

$$x + y = 1 - z$$

$$xy + yz + xz - xyz = 0$$

ou $$xy(1 - z) + z(x + y) = 0$$

ou $$(1 - z)(xy + z) = 0 \quad . (4);$$

en remplaçant $x + y$ par sa valeur $1 - z$.

Pour que le produit (4) soit nul, il faut que l'un ou l'autre des facteurs soit nul.

1° Soit $1 - z = 0$, d'où $z = 1$;
alors l'équation (1) devient :

$$x + y = 0;$$

d'où $$y = -x.$$

Portant dans l'équation (3) ces valeurs de z et de y, il vient $$\alpha x - \beta x + \gamma = 1,$$

d'où $$x = \frac{1 - \gamma}{\alpha - \beta};$$

alors $$y = -\frac{1 - \gamma}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma - 1}{\alpha - \beta}.$$

2° Soit $$xy + z = 0,$$

d'où $$z = -xy.$$

Portant cette valeur de z dans (1), on a :

$$x + y - xy = 1,$$

ou $$x(1 - y) = 1 - y,$$

d'où $$x = 1;$$

Dès lors, $$z = -y.$$

Portant ces valeurs de x et de z dans (3), il vient :

$$\alpha + \beta y - \gamma y = 1;$$

d'où $$y = \frac{1 - \alpha}{\beta - \gamma};$$

par suite,

$$z = -\frac{1 - \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha - 1}{\beta - \gamma}.$$

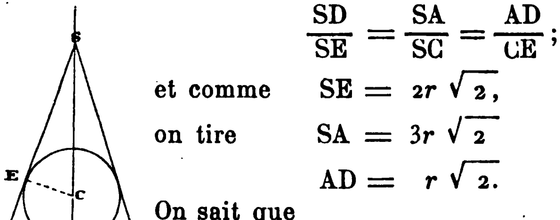
Nota. — **Ont résolu la même question : MM. Biette, du Havre; Vautré, de Saint-Dié; Coye, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne; Jullien, à Orléans.**

QUESTION 65.

Solution par M. Cordeau, élève de l'École Lavoisier, à Paris.

Lorsque la hauteur d'un cône circonscrit à une sphère est double du diamètre de la sphère, la surface totale est aussi double de la surface de la sphère et le volume du cône est double du volume de la sphère.

Les triangles rectangles semblables SAD SCE donnent :



$$\frac{SD}{SE} = \frac{SA}{SC} = \frac{AD}{CE};$$

et comme $SE = 2r\sqrt{2}$,

on tire $SA = 3r\sqrt{2}$

$AD = r\sqrt{2}.$

On sait que

$$\text{surf. totale cône} = \pi\, AD \,.\, SA + \pi\, \overline{AD}^2;$$

ce qui donne, en remplaçant AD et SA par leur valeur,

$$\text{surf. cône} = 8\pi r^2.$$

De même,

$$\text{vol. cône} = \pi.\, \overline{AD}^2.\ \frac{SD}{3} = \frac{8}{3}\pi r^3.$$

c. q. f. d.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Chenet, pension Saint-Louis (Saint-Étienne) ; Hugentobler, de Boppelsen (Suisse) ; Loritz, de Nancy ; Westphalen, Mérieult, du Havre; Pyolle, Chellier, de Constantine ; Demortain, de Doullens ; J. Dilhan, à Castres ; Trokay, Lerossay, de Liége ; Franquet, de Troyes ; Corbeaux, de Saint-Quentin ; Bonsir ; Lambert et Ancion, de Dinant ; Jordan, à Montpellier ; Lebland, Lamy, de Cherbourg.

QUESTION 66.

Solution par M. Cordeau, École Lavoisier.

De toutes les sphères qui ont leur centre sur la surface d'une sphère donnée, de rayon R, *quelle est celle dont la calotte interceptée par cette sphère donnée a la plus grande surface?*

(Martus.)

$$S = \frac{lmn\,(b+c)\,(c+a)\,(a+b)}{4abc\,(a+b+c)}.$$

(The Educational Times.)

103. — Si A et A′ sont deux puissances différentes d'un nombre premier a, B et B′ deux puissances différentes d'un nombre premier b, et si les nombres AB, AB′, A′B, A′B′ ont respectivement m, n, p, q diviseurs, le nombre des diviseurs du nombre abAB′BA′ est $(m+n+p+q)$.

(The Educational Times.)

104. — Si, dans un quadrilatère inscrit ABCD, les deux côtés consécutifs AB et BC sont égaux, et si la diagonale BD rencontre en H la diagonale AC, on a la relation

$$AB^2 = BD\ .\ BH.$$

105. — Construire *géométriquement* un triangle dont on connaît un côté, l'angle opposé et le produit des deux autres côtés.

CORRESPONDANCE.

M. H. M., officier d'infanterie à Verdun, nous adresse de très-bonnes solutions des questions 95, 98, 99, 101. Nous regrettons de ne pouvoir les insérer; nous nous sommes imposé comme règle de n'imprimer que des solutions d'élèves.

Nous rappelons à nos collaborateurs que notre travail de lecture et de classification des questions résolues sera rendu plus facile pour nous, s'ils veulent bien s'assujettir aux prescriptions suivantes :

1° Rédiger chaque question très-brièvement sur une feuille à part;
2° Dessiner avec soin les figures sur une feuille séparée du texte;
3° Reproduire toujours l'énoncé des questions.

Erratum des Tables de Dupuis.

Log. 96722 = 4,985.5253
au lieu de 4,985.6253.

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET C[ie],
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 1814-8.

ÉTUDE SUR LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE

par F. R. A.

(*Suite*, voir page 3.)

V. *Trois espèces de Rapports, Proportions et Progressions.*

Un *rapport*, en Mathématiques, est l'énoncé d'une comparaison entre deux nombres.

Le premier nombre se nomme *antécédent*, le deuxième *conséquent*, et la valeur du rapport *raison*.

Il y a trois manières de comparer deux nombres, 8 et 2 par exemple :

1° On considère *de combien l'antécédent surpasse le conséquent;* c'est le RAPPORT ARITHMÉTIQUE :

$$8 - 2 = 6$$

2° On considère *combien de fois l'antécédent contient le conséquent;* c'est le RAPPORT GÉOMÉTRIQUE :

$$\frac{8}{2} \text{ ou } 8 : 2 = 4$$

3° On peut aussi considérer *combien l'antécédent contient de facteurs égaux au conséquent;* ce sera le RAPPORT ALGÉBRIQUE :

$$\frac{8}{\overline{\overline{2}}} \text{ ou } 8\ (:)\ 2 = 3$$

Les propriétés des trois espèces de rapports présentent des analogies remarquables; nous ne les détaillerons pas ici.

Une *proportion* est la réunion de deux rapports égaux et de même nature.

On conçoit immédiatement trois espèces de proportions, selon l'espèce des rapports qu'on réunit, savoir :

Proportion arithmétique : $8 - 2 = 9 - 3;\ a - b = c - d$
Proportion géométrique : $8 : 2 = 12 : 3;\ a : b = c : d$
Proportion algébrique : $8 (:) 2 = 27 (:) 3;\ a\ (:)\ b = c\ (:)\ d$

Si on voulait lire d'une manière analogue les trois espèces de proportions, on dirait : *arithmétiquement*, ou *géométriquement*, ou *algébriquement*, a *est à* b *comme* c *est à* d.

Mais on peut lire comme de simples égalités, et dire :

a *moins* b *égale* c *moins* d ;
a *divisé par* b *égale* c *divisé par* d, *ou* a *sur* b *égale* c *sur* d ;
a *exponenté par* b *égale* c *exponenté par* d.

Une *progression* est une suite de nombres tels que chacun d'eux soit égal au précédent augmenté d'un nombre constant, ou multiplié par un nombre constant, ou élevé à une puissance d'un degré constant.

La *raison d'une progression* est le nombre constant qui agit sur chaque terme pour donner le terme suivant. La raison agissant sur chaque terme par *addition*, *multiplication* ou *exaltation*, on conçoit trois espèces de progressions, qui pourraient être appelées *progressions par addition*, *par multiplication* ou *par exaltation*, et que nous nommerons, en nous basant sur les usages reçus, *progressions arithmétiques*, *géométriques*, *algébriques*. Nous rappellerons en abrégé ces appellations par trois signes conventionnels :

÷ Progression arithmétique ou par addition,
⸫ Progression géométrique ou par multiplication,
∴∴ Progression algébrique ou par exaltation.

Voici un exemple des trois espèces de progressions, 3 étant pris comme *premier terme* et 2 comme *raison* :

÷	3	5	7	9	11
⸫	3	6	12	24	48
∴∴	3	9	81	6 561	43 046 721

Dans la première progression, la raison 2 s'ajoute à chaque terme pour donner le suivant; dans la seconde. 2 multiplie chaque terme, et dans la troisième, 2 se pose comme exposant à chaque terme pour donner le suivant.

Exemple des trois espèces de progressions, en symboles généraux :

	(Les premiers termes)					(Le dernier ou n^e terme.)
÷	p	$p+r$	$p+2r$	$p+3r$	.....	$p+r(n-1)$
⸫	p	pr	pr^2	pr^3	.....	pr^{n-1}
∴∴	p	p^r	p^{r^2}	p^{r^3}	.....	$p^{r^{n-1}}$

Les analogies qui existent entre les trois espèces de *rapports* se répètent entre les trois espèces de *proportions* et de *progressions :* ce qui est addition et soustraction dans une espèce devient multiplication et division dans l'espèce supérieure ; ce qui est multiplication et division dans une espèce devient exaltation et extraction ou exponentation dans l'espèce supérieure.

De plus, avec la notion et les signes de l'Exponentation, tous les symboles d'une même formule peuvent être isolés, même dans l'expression du dernier terme.

$$\div\!\div\!\div \; d = p^{r^{n-1}}$$

qui renferme une exponentielle du deuxième ordre.

En effet, on isole p en extrayant des deux membres la racine du degré marqué par r^{n-1}, ce qui donne

$$p = \sqrt[r^{n-1}]{d}$$

Pour isoler r, on considère la formule primitive, et l'on remarque que l'exposant r^{n-1} exprime combien de fois p est facteur dans d ; on peut donc poser

$$r^{n-1} = d \; (:) \; p$$

Et si l'on prend, de part et d'autre, la racine du degré $n - 1$, il vient

$$r = \sqrt[n-1]{d \; (:) \; p}$$

Nous venons d'écrire $r^{n-1} = d \; (:) \; p$; l'exposant $n - 1$ exprime combien de fois r est facteur dans le second nombre de l'égalité; on a donc, en exponentant les deux membres par r,

$$n - 1 = \frac{d \; (:) \; p}{r}$$

et, en ajoutant 1 aux deux membres,

$$n = 1 + \frac{d \; (:) \; p}{r}$$

Ainsi, connaissant le premier et le dernier terme, et la raison d'une progression algébrique, on trouvera le nombre des termes en exponentant le dernier terme par le premier,

et le résultat lui-même par la raison, puis augmentant de 1 le dernier résultat obtenu.

Application de cette formule à la progression algébrique donnée plus haut comme exemple :

$$n = 1 + \frac{43\,046\,721\ (:)\ 3}{2} = 1 + \frac{16}{2} = 1 + 4 = 5$$

43 046 721	3
14 348 907	3
4 782 969	3
1 594 323	3
531 441	3
177 147	3
59 049	3
19 683	3
6 561	3
2 187	3
729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Voici les calculs.

Le nombre 43 046 721 contient 16 facteurs 3; ainsi la formule primitive devient

$$n = 1 + 16\ (:)\ 2$$

16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Le nombre 16 contenant 4 facteurs 2, on a enfin

$$n = 1 + 4 = 5$$

Tel est, en effet, le nombre des termes de la progression considérée.

(*A suivre.*)

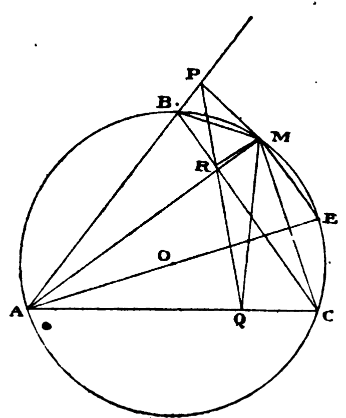
NOTE DE GÉOMÉTRIE

SUR LA DROITE DE SIMSON.

par M. **Julliard**, maître répétiteur au Lycée de Clermont-Ferrand.

Soit ABC un triangle, M un point du cercle circonscrit, MP, MQ, MR, les perpendiculaires abaissées sur les côtés du triangle, on sait que les trois points P, Q, R, sont en ligne droite; cette ligne est dite : *droite de Simson*, du nom de celui qui en a parlé le premier.

Pour un même point M, je désignerai par droites de Simson relatives aux angles A, B, C, les portions de la droite de Simson, définie plus haut, comprises entre les côtés respectifs de ces angles.



Soient l_1, l_2, l_3 les longueurs des droites de Simson relatives aux angles A, B, C (1). Pour tout point de l'arc opposé à l'angle A je considérerai l_1, l_2, l_3 comme positives;

Pour tout point de l'arc opposé à l'agle B je considérerai l_1, l_2 comme positives et l_3 comme négative ; pour tout point de l'arc opposé à l'angle C je considérerai l_1, l_3 comme positives et l_2 comme négative.

De ces définitions il résulte que l'on a pour un point quelconque M du cercle circonscrit la relation :

$$l_1 = l_2 + l_3$$

Théorème I. — *La longueur de l'un quelconque des segments de la droite de Simson d'un point* M, *est proportionnelle à la distance du point* M *au sommet de l'angle qui comprend le segment.*

Démonstration : Les triangles PQM et BMC sont semblables, car

$$\text{BMC} = \text{PMQ} = 180^\circ - \text{A}$$

et

$$\text{PQM} = \text{BCM} = \text{BAM}$$

on a donc

$$\frac{\text{PQ}}{\text{MQ}} = \frac{\text{BC}}{\text{MC}}$$

les triangles QMC et AME sont semblables, car AEM = ACM

on a donc

$$\frac{\text{MQ}}{\text{MC}} = \frac{\text{AM}}{2\text{R}}$$

Multipliant membre à membre les deux égalités précédentes

(1) Je désignerai l_1, l_2, l_3 aussi sous le nom de segments de la droite de Simson du point M.

il vient : $$PQ = \frac{BC}{2R} . AM,$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque : De la relation $l_1 = l_2 + l_3$ et du théorème I nous allons déduire une démonstration très-simple du théorème de Ptolémée.

On a : $$l_1 = l_2 + l_3,$$

donc : $$2Rl_1 = 2Rl_2 + 2Rl_3.$$

Appliquons le théorème I, il vient :

$$AM \times BC = BM \times AC + CM + AB$$

Ce qui démontre ce théorème : Dans un quadrilatère inscrit le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

Corollaire : Si l'on prend successivement pour point M les sommets du triangle ABC, on obtient les relations bien connues qui lient les hauteurs du triangle aux côtés et au rayon du cercle circonscrit; desquelles relations on déduit pour la surface du triangle l'expression d'un usage continuel

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Théorème II : *Pour deux points symétriques par rapport au diamètre passant par l'un des sommets du triangle, les deux droites de Simson, relatives à l'angle du sommet considéré, sont égales.*

Cela résulte immédiatement du théorème I.

Corollaire : Si l'on prend les symétriques des sommets du triangle par rapport aux diamètres passant par les autres sommets, et que, l'on mène les droites de Simson de ces symétriques, le théorème II pourra s'appliquer et nous conduire à trouver des droites égales aux hauteurs du triangle.

Théorème III : *Si l'on prend les droites de Simson de deux points symétriques par rapport au centre, la somme des carrés de deux droites de Simson relative à un même angle est constante et égale au carré du côté opposé à cet angle.*

Nous avons trouvé $PQ = \frac{BC}{2R} . AM$

soit M′ le symétrique de M par rapport au centre on a

$$\overline{AM'}^2 = 4R^2 - AM^2$$

et $P'Q' = \frac{BC}{2R} . AM'$

donc $\overline{P'Q'}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{BC}^2$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Corollaire : *La somme des carrés des six segments, des droites de Simson de deux points symétriques par rapport au centre, est constante et égale à la somme des carrés des côtés du triangle.*

On déduit aussi facilement du théorème III que deux droites de Simson de deux points symétriques par rapport au centre sont perpendiculaires entre elles.

Applications des théorèmes précédents. Soient l_1, l_2, l_3 les segments de la droite de Simson du point M,

l'_1, l'_2, l'_3 les segments de la droite de Simson d'un point M′ symétrique de M par rapport au centre on a :

(1) $l_1 = l_2 + l_3$

(2) $l'_1 = l'_2 + l'_3$

(3) $l_1^2 + l_1'^2 = a^2$

(4) $l_2^2 + l_2'^2 = b^2$

(5) $l_3^2 + l_3'^2 = c^2$

En éliminant l'_1, l'_2, l'_3 il nous restera une relation entre l_1, l_2, l_3 et a, b, c. Cette élimination donne immédiatement

$$\sqrt{a^2 - l_1^2} = \sqrt{b^2 - l_2^2} + \sqrt{c^2 - l_3^2}$$

J'élèverai 2 fois au carré et sachant que :

$$-(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b).(c+b-a)$$
$$= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$$

puis posant $a^2 + b^2 + c^2 = 2\Sigma^2$

on trouve la relation :

$$(\Sigma^2 - a^2)\, l_1^2 + (\Sigma^2 - b^2)\, l_2^2 + (\Sigma^2 - c^2)\, l_3^2 = (2s)^2$$

en appliquant si l'on veut, le théorème I, il vient :

$$(\Sigma^2 - a^2)\, a^2 . \overline{AM}^2 + (\Sigma^2 - b^2)\, b^2 . \overline{BM}^2 + (\Sigma^2 - c^2)\, c^2 . \overline{CM}^2 = a^2b^2c^2$$

SUR LE NOMBRE DE CHIFFRES CERTAINS

DANS L'EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE APPROCHÉ.

1. — Soit un nombre décimal approché quelconque, tel que 234,5678901....

Supposons que les cinq premiers chiffres à gauche soient bons et que le premier chiffre douteux soit 7. En multipliant par 100, on aura à extraire la racine d'un nombre

23456,78901...,

présentant une erreur inférieure à une unité.

Supposons que les six premières figures soient bonnes, et que le premier chiffre douteux soit 8; on multipliera par 10000 et l'on aura à extraire la racine du nombre

2345678,901...,

dont l'erreur est moindre que 10 unités.

On voit que l'on peut toujours ramener le problème à l'extraction de la racine d'un nombre entier présentant une erreur inférieure soit à 1, soit à 10.

2. — Soit A un nombre approché et $A + \alpha$ le nombre exact correspondant; l'erreur commise dans la racine carrée sera :

$$e = \sqrt{A + \alpha} - \sqrt{A}$$

mais $\sqrt{A+\alpha} - \sqrt{A} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{A+\alpha} + \sqrt{A}} < \dfrac{\alpha}{2\sqrt{A}}$

donc :

$$e < \frac{\alpha}{2\sqrt{A}}$$

1er Cas — $\alpha < 1$

3. — Dans ce cas, $e < \dfrac{1}{2\sqrt{A}}$

1° Supposons que A ait $2n$ chiffres et soit pq les deux premiers, nous aurons :

$$e < \frac{1}{2\sqrt{pq}\,.\,10^{2n-2}}$$

$$< \frac{1}{2\,.\,10^{n-1}\sqrt{pq}}$$

Si pq est au moins égal à 25, nous aurons *a fortiori*

$$e < \frac{1}{10^n}$$

par suite on pourra compter sur n chiffres décimaux à la racine et comme elle a n chiffres à la partie entière, on connaîtra $2n$ chiffres de la racine.

Si pq est inférieur à 25, on ne peut plus compter que sur $n-1$ chiffres décimaux, donc en tout sur $2n-1$ chiffres à la racine.

2° Supposons que A ait $2n+1$ chiffres et soit p le premier on pourra dire que $e < \frac{1}{2 \cdot 10_n \sqrt{p}}$

donc *a fortiori* $e < \frac{1}{10^n}$.

Donc on pourra compter sur les n premières décimales de la racine, et comme cette racine a $n+1$ chiffres à la partie entière, elle aura $2n+1$ chiffres exacts.

2e CAS — $a < 10$

4. — L'inégalité fondamentale devient alors

$$e < \frac{10}{2\sqrt{A}}$$

D'où l'on conclut ce qui suit :

1° Si A a $2n$ chiffres et que la première tranche à gauche soit au moins égale à 25, l'erreur commise à la racine sera inférieure à $\frac{1}{10^{n-1}}$, on en connaîtra donc $n-1$ décimales, et comme la racine a n chiffres à la partie entière, on aura finalement autant de chiffres sûrs à la racine qu'il y en a dans le nombre;

2° Si la première tranche à gauche est inférieure à 25, la racine aura autant de chiffres exacts moins un, qu'il y en a dans le nombre donné;

3° Si A a un nombre impair de chiffres, le nombre des chiffres certains de la racine sera égal au nombre des chiffres certains de A.

De cette discussion résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Dans l'extraction de la racine carrée d'un nombre approché, on peut compter sur autant de chiffres certains qu'il y en a dans le nombre; excepté si le nombre des chiffres du nombre donné est pair et si la première tranche est inférieure à 25. Dans ce cas la racine a autant de chiffres certains que le nombre, moins un.*

Remarque. — Nous disons, pour abréger, qu'un nombre a n chiffres certains, quand l'erreur est moindre qu'une unité de l'ordre de ce n^e chiffre. J. B.

REMARQUES

SUR

L'ENSEIGNEMENT DE LA TRIGONOMÉTRIE

par J. Hoüel.

(*Suite*, voir page 39.)

II

L'enseignement de la Trigonométrie est compliqué d'une manière fâcheuse par l'habitude où l'on est d'introduire dès le début l'usage de Tables contenant les *logarithmes* des fonctions circulaires au lieu des valeurs naturelles de ces fonctions. Il serait infiniment préférable de commencer par exposer, avec très-peu de détails, et en se servant uniquement de la méthode d'approximation fondée sur la bissection successive des angles, la construction des Tables des valeurs naturelles, et ce serait un excellent exercice pour les élèves que de calculer eux-mêmes, en suivant les prescriptions indiquées, une petite Table trigonométrique, à deux ou trois décimales, et avec des intervalles assez rapprochés pour que l'interpolation pût se faire commodément. Cette Table, corrigée avec soin, devrait être seule mise entre leurs mains; avec son aide, en y joignant le secours de la règle à calcul, ils seraient à même de résoudre toutes les questions de Trigonométrie avec une approximation bien supérieure à

l'exactitude de leurs constructions graphiques, et beaucoup plus promptement que par l'emploi des logarithmes, surtout quand on complique les formules d'angles auxiliaires, sous prétexte de les rendre *calculables par logarithmes.*

L'usage prématuré des logarithmes trigonométriques, dans un enseignement s'adressant à des jeunes gens encore peu experts dans la pratique du calcul, ne peut que retarder leurs progrès dans cet art et leur en fermer l'intelligence. Le mal est grave surtout lorsqu'on met dans leurs mains novices les grandes Tables qui conviennent seulement aux praticiens exercés, et dont le maniement n'apprend rien de plus, au point de vue de la théorie, que celui des petites Tables à trois ou quatre figures. On fausse leurs idées sur l'exactitude que l'on peut généralement obtenir, en leur laissant supposer qu'une approximation à un dix-millionnième près de la valeur du résultat correspond aux cas ordinaires de la réalité. Aussi voit-on des élèves qui ne sont nullement étonnés quand on leur demande de calculer le rayon de la Terre à un centimètre près. Si l'on a la prétention de les initier à la solution des problèmes pratiques, pense-t-on les y bien préparer en leur posant des questions aussi fantastiques?

Ce vice capital de la méthode s'étend sur tout ce qui touche à l'enseignement du Calcul numérique. Au lieu d'occuper les pauvres écoliers, pendant tant de mortelles heures, à transcrire des nombres à *sept* figures (le nombre sept est, paraît-il, un nombre sacré en Mathématiques comme ailleurs), et de noyer leurs idées dans des flots de chiffres, ne vaudrait-il pas mieux faire appel plus souvent à leur intelligence et à leur bon sens, et leur montrer que l'art du calcul, loin d'être une routine aveugle et abrutissante, fournit, au contraire, au calculateur de continuelles occasions de développer les ressources de son esprit d'invention, en lui offrant un sujet d'expériences aussi variées qu'intéressantes, et donnant lieu à l'emploi de procédés divers, plus ou moins exacts, plus ou moins expéditifs? Loin de là, dans les traités même les plus appréciés, on ne trouve pas un seul mot pour avertir, par exemple, le commençant qu'il dépense son

temps en pure perte lorsqu'il prend avec sept figures le logarithme d'un nombre connu seulement avec deux ou trois chiffres exacts, et que le bon sens lui interdit de conserver dans une addition plus de chiffres décimaux qu'il n'y en a dans le nombre le moins approché. Et pourtant il n'est pas besoin de réfléchir bien longuement pour se convaincre de l'absurdité de telles pratiques.

Là où des fautes si grossières passent inaperçues, il ne faut pas s'étonner de l'absence de toute indication sur la manière de calculer, au moyen des différences tabulaires, une limite supérieure de l'erreur commise, de quelque utilité que soit la connaissance de cette limite, tant pour l'appréciation de l'exactitude du résultat que pour la comparaison des avantages respectifs que peuvent présenter les divers modes de calcul.

Disons maintenant quelques mots sur l'usage des angles auxiliaires employés pour transformer à tout prix la formule finale en une expression monôme, abstraction faite du travail que coûte cette transformation. Nous montrerons sans peine que les formules ainsi obtenues ne sont pas en général les plus aisément *calculables par logarithmes*, et que la simplicité apparente des valeurs auxquelles on parvient n'est, en réalité, le plus souvent qu'un leurre et un trompe-l'œil.

D'abord personne ne peut nier que la recherche d'un logarithme dans les Tables trigonométriques, quelque perfectionnées qu'elles soient, exige beaucoup plus de temps et d'attention que la recherche analogue dans la Table des logarithmes des nombres. La moindre pratique suffit pour reconnaître cette vérité. La substitution de la Table trigonométrique à la Table des logarithmes des nombres ne peut devenir avantageuse qu'autant qu'elle diminue le nombre des *lectures*. Or c'est précisément le contraire qui arrive dans la plupart des cas.

Considérons, par exemple, les formules pour la résolution d'un triangle sphérique, dont on connaît deux côtés a, b et l'angle compris C. Ces formules, telles qu'elles se présentent immédiatement, sont les suivantes :

$$(1)\quad\begin{cases}\cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C,\\ \cot b \sin a - \cot B \sin C = \cos a \cos C,\\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.\end{cases}$$

Les formules, dites *calculables par logarithmes*, que l'on en tire sont :

$$(2)\quad\begin{cases}\tang m = \tang a \cos C,\ \tang A = \dfrac{\sin m \tang C}{\sin (b - m)},\\ \tang n = \tang b \cos C,\ \tang B = \dfrac{\sin n \tang C}{\sin (a - n)},\\ \cos c = \dfrac{\cos a \cos (b - m)}{\cos m} = \dfrac{\cos b \cos (a - n)}{\cos n}.\end{cases}$$

L'emploi de ces formules exige 16 lectures pour trouver les 16 quantités.

$\log \tang a$,	$\log \cos C$,	m,	$\log \tang b$,
n,	$\log \sin m$,	$\log \tang C$,	$\log \sin (b - m)$
A,	$\log \sin n$,	$\log \sin (a - n)$,	B,

$\begin{cases}\log \cos a,\\ [\text{ou} \log \cos b],\end{cases}$ $\begin{cases}\text{Log} \cos (b - m),\\ \text{ou}\\ \log \cos (a - n),\end{cases}$ $\begin{cases}\log \cos m,\\ [\text{ou} \log \cos n],\end{cases}$ c,

plus 2 soustractions d'angles pour avoir $b - m$ et $a - n$, et, tant que la routine s'obstinera à conserver la division sexagésimale du cercle, toute opération sur les angles pourra être considérée comme exigeant un travail équivalent à celui d'une lecture.

Les formules (1) étant mises sous la forme

$$\cos c = \cos a \cos b\,(1 + \tang a \tang b \cos C),$$

$$\cot A = \frac{\tang b}{\tang a} \cdot \frac{\cos b}{\sin C}\left(1 - \frac{\tang a}{\tang b} \cdot \cos C\right),$$

$$\cot B = \frac{\tang a}{\tang b} \cdot \frac{\cos a}{\sin C}\left(1 - \frac{\tang b}{\tang a} \cdot \cos C\right),$$

leur calcul n'exige que 15 lectures, dont 6 dans la Table des nombres, pour la recherche des quantités

$\log \cos a$, $\log \cos b$, $\log \tang a$, $\log \tang b$,

$\log \cos C$, $\log \sin C$, $N = \dfrac{\tang a}{\tang b} \cos C$, $N' = \dfrac{\tang b}{\tang a} \cos C$,

$N'' = \tang a \tang b \cos C$, $\log (1 - N)$, $\log (1 - N')$, $\log (1 + N'')$,

A, B, C,

et aucune soustraction ni division d'angles.

Voici le tableau complet du calcul, au moyen de ces dernières formules, de l'exemple numérique développé, à l'aide des angles auxiliaires, dans le *Traité de trigonométrie* de M. Serret, p. 180 :

$a = 113^\circ\ 2'\ 56'',64$	$\cos C \ldots - \bar{1},876\ 7036$	$\dfrac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, a} \ldots - 0,5188004$
$b = 82^\circ\ 39'\ 28'',40$	$\text{tang}\, a \ldots - 0,371\ 1149$	$\dfrac{\cos b}{\sin C} \ldots\ldots \bar{1},2881502$
$C = 138^\circ\ 50'\ 13'',69$	$\text{tang}\, b \ldots\ 0,889\ 9153$	$1 - N \ldots\ldots \bar{1},8876627$
		$\cot A \ldots - \bar{1},6945773$
		$A = 116^\circ\ 20'\ 2'',21$
$\sin C \ldots \bar{1},818\ 3589$	$N'' \ldots\ldots\ldots 1,137\ 7338$	$\dfrac{\text{tang}\, a}{\text{tang}\, b} \ldots - \bar{1},481\ 1996$
$\cos b \ldots \bar{1},106\ 5091$	$N \ldots\ldots\ldots \bar{1},357\ 9032$	$\dfrac{\cos a}{\sin c} \ldots - \bar{1},774\ 3943$
$1 + N'' \ldots 1,168\ 2617$	$N' \ldots\ldots\ldots 0,395\ 5040$	$1 - N' \ldots - 0,1720236$
$\cos c \ldots - \bar{1},867\ 5240$	$N'' = 13,732$	$\cot B \ldots - \bar{1},4276175$
$c = 137^\circ\ 29'\ 4'',63$	$N = 0,2279834$	$B = 104^\circ\ 59'\ 8'',38$
	$N' = 2,4860165$	

Nous avons inscrit ici tous les calculs qu'un opérateur un peu exercé ne doit pas faire de tête ou à l'aide de la règle à calcul. Le nombre des lectures serait encore diminué de 3, si l'on faisait usage des Tables des logarithmes d'addition et de soustraction.

On peut maintenant juger de la différence de longueur entre les opérations ci-dessus et les opérations faites avec les méthodes artificielles où l'on emploie les angles auxiliaires, ou même celles qui, comme les analogies de Neper ou les formules de Delambre et Gauss, exigent un assez grand nombre d'additions ou de soustractions d'angles.

Nous concluons de là que l'usage *direct* des formules fondamentales de la Trigonométrie est de tous les procédés de calcul le plus expéditif, et c'est une pure illusion que de croire gagner quoi que ce soit à transformer ces formules en expressions monômes, soit à l'aide d'angles auxiliaires, soit à l'aide de formules qui se prêtent d'elles-mêmes à cette transformation. Il faudrait donc rayer des livres d'enseignement cette locution, aussi mal choisie que

la méthode qu'elle désigne : *Rendre une formule calculable par logarithmes.*

Nous ne voulons pas dire qu'il ne se rencontre jamais des cas spéciaux où l'emploi des angles auxiliaires est avantageux ; mais ces cas ne se présentent jamais dans les théories qui constituent les éléments de la Trigonométrie. Tout au plus conviendrait-il de donner, *comme simples exercices*, quelques exemples de cette transformation, et de saisir cette occasion pour en faire ressortir, non les avantages, mais les inconvénients.

CONCOURS GÉNÉRAUX.

CONCOURS DE 1860

Classe de troisième (*sciences*).

Extraire la racine carrée d'un nombre quelconque, à moins d'une certaine unité décimale, et dire combien il faut prendre de chiffres au nombre pour avoir une approximation donnée.

Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et l'angle formé par les prolongements des deux côtés opposés.

Classe de seconde (*sciences*).

On donne la suite des termes

$$1 - \frac{m^2}{2^2} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)(m^3-8^2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} + \ldots\ldots$$

dont la loi est évidente. On demande de calculer sous la forme la plus simple que l'on pourra, la somme des deux premiers termes, la somme des trois premiers, celle des quatre premiers, et en général celle des n premiers, n étant quelconque.

Prouver que si m désigne un nombre entier positif, on peut toujours choisir n de telle sorte que la somme soit nulle.

Classe de rhétorique (*sciences*).

La surface d'un triangle ABC est égale à un carré donné.

Le côté AB est une ligne donnée c. La différence A—B des angles adjacents

est égale à un angle positif donné $\alpha < 180°$. — On propose de calculer les angles A et B.

Le problème est-il toujours possible et admet-il plusieurs solutions?

Classe de logique (*lettres*).

On donne deux droites parallèles Ax, yz et un point A sur la première.

On mène par ce point une sécante quelconque AB et par le point B où elle rencontre la seconde parallèle, on élève BC perpendiculaire à AB. Au point C on fait l'angle ACD double de BAC et de A on abaisse la perpendiculaire AM sur CD.

On propose de démontrer que si l'on répète la même construction pour d'autres sécantes menées par le point A, tous les points analogues à M seront sur une même circonférence de cercle.

Classe de logique (*sciences*).

Soient AMA′, BNB′ deux circonférences concentriques et AA′ un diamètre fixe; soient OM et OM′ deux droites rectangulaires menées par le centre O, dont l'une coupe les deux circonférences en M et N et l'autre en M′ et N′. On abaisse sur AA′ les perpendiculaires MQ et M′Q′; des points N et N′ on abaisse sur MQ et M′ Q′, les perpendiculaires NP et N′P′. Enfin on joint OP et OP′ et l'on forme ainsi l'angle POP′.

Comment doivent être tracées les droites rectangulaires OM et OM pour l'angle POP′ soit maximum?

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE POITIERS.

Sessions de 1876.

Un plan passe par la ligne de terre et un point. Trouver son intersection avec une droite perpendiculaire à la ligne de terre donnée par ses traces.

La base d'un triangle a une longueur de 6543 mètres. L'angle au sommet est 67° 53′ 41″. Calculer le rayon du cercle circonscrit.

Couper une sphère par un plan de manière que le cône ayant pour base la section obtenue et pour sommet le centre de la sphère ait une surface donnée.

Dans un triangle on donne

$$a = 3246^{m},927;$$
$$A = 57° \, 32' \, 7'',52$$
$$B = 73° \, 42' \, 50'',06.$$

Calculer le côté c.

Etant donné un demi-cercle ADC, mener une perpendiculaire BD par un point B du diamètre AC, telle que $AB + BD = l$.

La distance de Jupiter au Soleil étant 5, 2, celle de la Terre au Soleil étant prise pour unité, calculer au moyen de la troisième loi de Képler la durée de la révolution de Jupiter.

Une sphère creuse a un rayon intérieur de 6266 mètres et un rayon extérieur de 6366 mètres. Trouver le volume compris entre deux plans parallèles situés du même côté du centre à des distances de 3000 et 3100 mètres.

Étant donnée une sphère et un diamètre AB, mener un plan CD perpendiculaire à ce diamètre de façon que l'aire de la zone CAD soit équivalente à l'aire latérale du cône CBD. Calculer à un millième près le rapport du volume sphérique extérieur au cône au volume de la sphère.

Quelle somme peut-on emprunter actuellement pour pouvoir se libérer par 15 paiements égaux de 3000 fr. chacun, effectués le premier un an après l'emprunt, et les suivants d'année en année. — Le taux de l'intérêt est 5 1/2 par an.

Aux milieux des côtés d'un triangle solide on applique des forces perpendiculaires aux côtés, proportionnelles aux longueurs de ces côtés et dans le plan du triangle. Démontrer qu'elles se font équilibre.

Du milieu de la base d'un rectangle comme centre, on décrit un arc de cercle ayant l'autre base pour corde, et l'on fait tourner la figure ainsi obtenue autour de la première base. Sachant que la hauteur du rectangle est h, que la surface totale du solide ainsi formé est $2\pi a^2$, on demande l'expression de la base.

Mener par l'extrémité d'un diamètre une corde telle que le volume engendré par la rotation autour du diamètre du segment circulaire qu'elle détermine soit les $\frac{9}{16}$ du volume de la sphère.

Trouver la raison d'une progression géométrique ayant pour termes extrêmes 1 et 65536, et comprenant 17 termes en tout.

Sessions de 1877.

Un triangle ABC, rectangle en A, tourne autour d'un axe xy situé dans son plan et passant par le sommet C. Quel doit être l'angle du côté AC avec l'axe pour que le volume engendré soit maximum? On suppose AB = 2AC.

Connaissant la longueur de la circonférence méridienne de la terre supposée sphérique, calculer la longueur du parallèle situé à une latitude de 48° 56′ 13″, et calculer le rapport du rayon de ce parallèle au rayon de la sphère.

Lieu des points d'où l'on peut mener à la parabole des tangentes rectangulaires.

La hauteur d'un triangle rectangle détermine sur l'hypoténuse deux segments dont les longueurs sont 700 et 4032. — On demande de calculer les côtés, la hauteur, les angles et la surface du triangle.

Deux cônes sont circonscrits à une même sphère suivant deux cercles dont les plans sont parallèles. Les génératrices de ces cônes font avec l'axe commun des angles α et α'; on demande d'exprimer au moyen des angles α et α' et du rayon R de la sphère : 1° la distance SS′ des sommets des deux cônes; 2° le rayon du cercle suivant lequel se coupent les deux cônes; 3° le volume compris entre les deux cônes. On rendra ces expressions calculables par logarithmes, et on cherchera ce qu'elles deviennent en supposant $\alpha' = 90^\circ - \alpha$.

Dans un cercle O, on mène un rayon variable OM faisant un angle α avec le rayon fixe OA, et par le point M une droite MI telle que l'angle OMI soit égal aussi à α. Cette droite rencontre OA en I. Trouver l'expres-

sion générale du rapport $\frac{AI}{OA}$, et examiner comment il varie lorsque α varie de 0 à 90°.

Quelle doit être la raison d'une progression arithmétique dont le premier terme est a pour que la somme des n premiers termes soit égale à an^2?

Dans un triangle on donne le côté a et les angles B, C. On propose de calculer les distances du milieu du côté a aux points où les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A rencontrent ce côté. Quelle relation trouve-t-on entre ces deux distances?

Par le milieu O d'une droite AB, on mène une sécante ab faisant avec AB un angle α. Des points A et B on abaisse les perpendiculaires Aa, Bb et l'on fait tourner la figure $AaObBOA$ autour d'une perpendiculaire à AB menée par le point A. Trouver la surface totale du solide engendré. Comment varie-t-elle avec α ?

On donne la hauteur ou l'hypoténuse d'un triangle rectangle et le volume qu'il engendre en tournant autour de l'hypoténuse. Trouver les côtés.

Connaissant l'hypoténuse d'un triangle rectangle et l'un des angles aigus, calculer le rayon du cercle inscrit.

Trouver deux nombres connaissant leur somme et la somme de leurs racines carrées. Exemple : La somme des nombres est 66265 et celle des racines 283.

Résoudre l'équation $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$.

La différence des rayons des deux cercles est 5 mètres. La différence de leurs surfaces est 272 mètres carrés. Calculer chacun des rayons.

Calculer le nombre de degrés, minutes et secondes d'un arc dont la longueur est égale au rayon de la circonférence.

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le **docteur Henri Suter**, de **Zürich**, traduite par M. A.-G. MELON.

Suite. Voir Tome II, page 25 et 46.

LA SCIENCE CHEZ LES GRECS.

Son importation. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie.

Les premières découvertes géométriques des Pythagoriciens se lient étroitement à ces connaissances arithmétiques. La théorie des proportions géométriques avait pour parallèle en géométrie les propositions de similitude ; en outre, le problème qui a pour but de trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites est le corollaire immé–

diat de la théorie des proportions. *Plutarque* attribue à *Pythagore* la solution de ce problème : « étant données deux figures, en construire une troisième qui soit égale à la première et semblable à la seconde. » — Jusqu'à quel point le mérite de ces inventions revient-il à *Pythagore?* C'est ce qui est difficile à établir. Toutefois les travaux ultérieurs de ses élèves nous portent à faire remonter l'origine de ces inventions jusqu'aux premiers temps de l'école.

La recherche de triangles rectangles rationnels est connexe à la théorie des progressions arithmétiques ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer. Une autre découverte importante qui est communément attribuée aux Pythagoriciens, la notion des grandeurs irrationnelles et de l'incommensurabilité, est également connexe à cette théorie des progressions arithmétiques. Mais la haute importance de cette notion pour les mathématiques ne s'est révélée que plus tard. Dans ce même domaine rentre la découverte de ce théorème célèbre de toute antiquité : le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit. Tous les écrivains, d'un commun accord, attribuent ce théorème à *Pythagore*. *Diogène Laerce* et *Plutarque* nous disent que, dans sa joie, *Pythagore* aurait sacrifié un taureau. Ces dernières assertions rentrent très-probablement dans le domaine de la fable, car elles sont en contradiction formelle avec les principes et les enseignements de la philosophie pythagoricienne.

A l'étude des nombres polygonaux correspond aussi, dans le champ de la Géométrie, une division à laquelle les Pythagoriciens vouèrent une attention spéciale, la théorie des polygones réguliers et des polyèdres réguliers. Ces derniers leur servirent de symboles pour les éléments du monde physique. A la terre correspondait le cube ; au feu, le tétraèdre ; à l'air, l'octaèdre ; à l'eau l'icosaèdre. Mais la sphère correspondait à l'ensemble de l'univers ; car, disaient-ils, elle embrasse tous ces corps. C'est ce que nous enseigne *Platon* dans le *Timée*.

De toutes les figures planes, le triangle rectangle, produit par le dédoublement du triangle équilatéral, était pour les

Pythagoriciens, la plus belle et la plus parfaite. Aussi considéraient-ils tous les polygones réguliers et en général le plan tout entier comme composé de triangles de ce genre groupés autour d'un même point. Ils voulaient ramener toutes les figures planes à ces triangles; de ce principe sortirent sans doute les théorèmes sur la comparaison et la juxtaposition de surfaces, théorèmes dont la découverte est attribuée aux Pythagoriciens, de même que cette proposition : Construire sur une droite donnée et avec un angle donné un parallélogramme équivalent à un triangle donné.

Montucla, dans son Histoire des Mathématiques désigne Pythagore comme l'inventeur de la théorie de l'isopérimétrie. Il le conclut de ces paroles de *Diogène Laërce* (l. VII) : — De tous les corps le plus noble est la sphère; de toutes les figures planes la plus noble est le cercle. — Du reste, il est parfaitement incompréhensible, comme le dit *Bretschneider*, que Montucla puisse regarder ces propositions comme équivalentes à celles-ci : la sphère est, de tous les corps de même surface, celui qui a le plus grand volume; le cercle est de toutes les figures de même périmètre celle qui a la plus grande surface.

L'assertion de *Diogène Laërce* porte visiblement le caractère de la philosophie pythagoricienne. Toutefois il pourrait être vrai que cette théorie philosophique, ainsi qu'il est arrivé pour beaucoup d'autres, ait conduit les Pythagoriciens à découvrir des vérités géométriques du même ordre; mais on n'a pas le moindre indice permettant d'affirmer que la théorie de l'isopérimétrie ait déjà été connue à cette époque.

Pythagore rendit encore d'autres services à la science par sa théorie mathématique de la musique. Selon *Jamblique* et d'autres, il aurait trouvé cette loi que la hauteur du son rendu par une corde est inversement proportionnelle à la longueur de la corde. Il aurait été amené à cette découverte par l'étude des sons de hauteur différente produits par les chocs des marteaux d'une forge.

La musique était en grand honneur à l'école de Pythagore. Elle ne pouvait par suite manquer d'exercer une grande

influence sur le système philosophique de cette école. Les Pythagoriciens établissaient une relation entre les intervalles de la gamme et les distances des dix sphères dans lesquelles se mouvaient, selon eux, les corps célestes ; et dans cette relation ils voyaient l'origine de toute harmonie. C'est ce qui constitue *la musique des Sphères de Pythagore.*

Exposer de plus longs développements sur ce sujet dépasserait le cadre de notre ouvrage ; cependant nous citerons en lieu convenable différents écrits relatifs à la musique, émanant d'hommes célèbres. Quittons Pythagore et poursuivons le développement de la Géométrie chez ses élèves jusqu'à Platon.

Bien que nous ne connaissions que peu de noms éminents parmi les promoteurs de cette science qui ont vécu dans ce laps de temps, cependant le caractère de cette science est bien plus accusé qu'à n'importe quelle autre époque antérieure. La cause se trouve dans la centralisation de toutes les forces scientifiques dirigées vers la solution de trois problèmes qui, à travers toute l'antiquité, ont attiré l'attention des grands géomètres : la division de l'angle en plus de deux parties égales, la duplication du cube et la quadrature du cercle. Ces problèmes se rattachent de très-près aux progrès et aux tendances de l'époque précédente, à la théorie des proportions et à la transformation des surfaces.

(A suivre.)

CONCOURS GÉNÉRAL 1873

Classe de philosophie.

Solution par M. Demortain, à Doullens.

On inscrit dans un cercle donné tous les triangles dont deux côtés sont respectivement parallèles à deux droites fixes données, et l'on demande le lieu des centres des cercles inscrits dans ces triangles.

Soient AC et BC les deux côtés d'un triangle parallèles aux deux directions données, O′ le centre du cercle inscrit

à ce triangle. Les bissectrices des angles A et B passent constamment par les points D et E, milieux des arcs AEC, BDC; en effet, les milieux de ces arcs s'obtiennent en abaissant du centre O des perpendiculaires sur les cordes BC, AC de direction constante. L'angle C étant constant la somme des angles A et B et par conséquent leur demi-somme est constante. Les points D et E étant fixes, on voit que le lieu demandé est le segment capable de l'angle DO'E décrit sur DE comme corde.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Cottereau, de Châteauroux; Perrin, de Clermont-Ferrand; Merieult, du Havre.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE DIJON 1877

Solution algébrique, par M. Lorain, élève du Collége de Semur.

Dans un triangle on donne l'angle A *et les longueurs* n *et* p *des médianes qui aboutissent respectivement aux sommets* B *et* C. *On demande de calculer en fonction des données les longueurs des côtés* AC *et* BC.

En représentant les trois côtés par a, b, c on a les relations

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad (1)$$

$$a^2 + c^2 = 2p^2 + \frac{b^2}{2} \qquad (2)$$

$$a^2 + b^2 = 2n^2 + \frac{c^2}{2} \qquad (3)$$

Retranchant (3) de (2) et remplaçant dans la première a^2 par sa valeur tirée de la seconde, il vient

$$\frac{3}{2}\left(c^2 - b^2\right) = 2\left(p^2 - n^2\right)$$

$$4c^2 + b^2 - 4bc \cos A = 4p^2$$

de la première de ces équations on tire

$$(4) \qquad c^2 = \frac{4}{3}\left(p^2 - n^2\right) + b^2$$

et en remplaçant dans la seconde, on obtient

$$15b^2 - 12bc \cos A = 16n^2 - 4p^2 = 3k^2$$

ou $$5b^2 - 4bc \cos A = k^2.$$

De là on tire $$(5b^2 - k^2)^2 = 16b^2c^2 \cos^2 A.$$

Remplaçons c^2 par sa valeur (4) on obtient

$$(75 - 48 \cos^2 A)b^4 - 2\left(15k^2 + 32 \cos^2 A\,(p^2 - n^2)\right)b^2 + 3k^4 = 0.$$

Posons $15k^2 + 32 \cos^2 A\,(p^2 - n^2) = 3m^2$, l'équation devient $(25 - 16 \cos^2 A)b^4 - 2m^2b^2 + k^4 = 0$

d'où $$b^2 = \frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - k^4(25 - 16 \cos^2 A)}}{25 - 16 \cos^2 A}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait

$$m^4 > k^4(25 - 16 \cos^2 A)$$

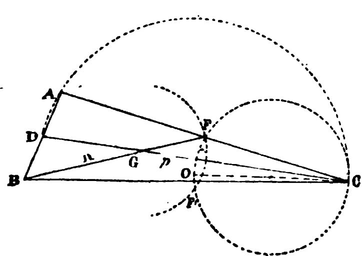
ce qui donnerait, en remplaçant m^4 et k^4 par leurs valeurs, une relation entre les données.

On trouverait c par une marche analogue.

Nota. — **M. Belin, de Semur, a résolu la même question.**

Solution géométrique par M. Juret, élève du Collège de Semur.

Supposons le problème résolu et soit ABC le triangle demandé. Sur la médiane DC $= p$ décrivons un segment capable de l'angle A; soit O le centre de l'arc de ce segment.



Le milieu F du côté AC se trouve sur la circonférence ayant OC pour diamètre; il se trouve aussi sur la circonférence décrite du centre de gravité G connu du triangle ABC, circonférence ayant $\frac{n}{3}$ pour rayon. Cette circonférence coupe la première en F et F', le point F' ne répond évidemment pas à la question. Joignons FG et prolongeons cette droite d'une quantité GB $= \frac{2n}{3}$; tirons la droite

DB. Le triangle ABC est le triangle cherché. Pour le démontrer il suffit de faire voir que les points A, D, B sont en ligne droite. Or la figure donne

$$AC \, . \, GD \, . \, FB = b \, . \, \frac{p}{3} \, . \, n$$

$$AF \, . \, GB \, . \, CD = \frac{b}{2} \, . \, \frac{2n}{3} \, . \, p$$

d'où $$AC \, . \, GD \, . \, FB = AF \, . \, GB \, . \, CD.$$

Donc les trois points A, D, B sont en ligne droite et ABC est bien le triangle cherché.

QUESTION 2.

Solution par M. Lorain, élève du Collége de Semur.

On donne un cercle et un point A dans son plan.

Déterminer par une formule logarithmique les variations de l'angle sous lequel on voit du point A le diamètre du cercle, lorsque ce diamètre prend toutes les directions possibles autour du centre.

Soient $AB = x$, $AC = y$, $OA = d$ et R le rayon du cercle. Le triangle ABC donne

$$x^2 + y^2 = 2d^2 + 2R^2 \qquad (1)$$

$$4R^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A \qquad (2)$$

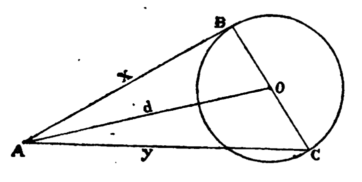
retranchant, il vient :

$$2xy \cos A = 2(d^2 - R^2)$$

d'où $$\cos A = \frac{(d + R)(d - R)}{xy} \qquad (3)$$

formule logarithmique demandée.

Discussion. — Le maximum de l'angle A correspond au minimum du cosinus ; or cos A est minimum quand xy est maximum; mais le produit xy qui peut s'écrire $(x^2)^{\frac{1}{2}} \, (y^2)^{\frac{1}{2}}$ se compose de deux facteurs dont la somme est constante, il sera donc maximum quand on aura $x = y$.



Dans ce cas le triangle BAC est isoscèle et BC est perpendiculaire sur AO.

L'angle A peut être nul; son minimum sera donc zéro. Dans ce cas cos A = 1, et on a.

$$(d + R)(d - R) = xy$$

ou

$$2(d^2 - R^2) = 2xy$$

Ajoutant et retranchant successivement de l'équation (1)

$$x + y = 2d$$
$$x - y = 2R$$

alors $x = d + R, \quad y = d - R$

ce qu'on pouvait voir sur la figure.

Jusqu'ici nous avons supposé $d > R$; si $d = R$, c'est-à-dire si le point A est situé sur la circonférence, on aura

$$\cos A = \frac{0}{xy}$$

Si le produit xy n'est pas nul, cos A = 0, par conséqueut l'angle A est droit; il n'y a d'exception que lorsque x ou y est nul; dans ce cas $\cos A = \frac{0}{0}$ et la figure montre que l'angle vaut 0, par suite cos A = 1.

Si $d < R$, le cosinus devient négatif, ce qui indique que A est obtus; on trouverait un maximum et un minimum comme dans le premier cas.

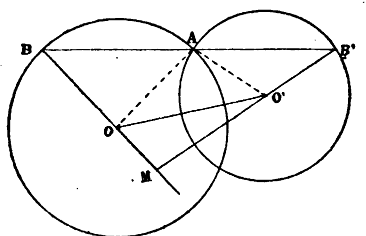
CONCOURS GÉNÉRAL DE 1873.

Classe de troisième.

1re QUESTION.

Solution par M. PERRIN, élève du Lycée de Clermont-Ferrand.

Etant données deux circonférences O *et* O′ *qui se coupent; on mène par un des points communs une sécante qui rencontre la circonférence* O *en un point* B *et la circonférence* O′ *en un point* B′. *On joint le point* B *au point* O *et le point* B′ *au point*



O'. *Les deux droites ainsi menées se coupent en* M — *lieu géométrique de ce point.*

Menons OA, O'A. Les triangles BOA, AO'B' sont isoscèles. Or l'angle M est le supplément des angles B et B' ou des angles OAB, O'AB'; il est donc égal à l'angle constant OAO' et le lieu des points M est un segment de cercle décrit sur OO' et capable de l'angle OAO'.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Bruyand, de Troyes; Demortain, de Doullens.

2e Question.

Solution par M. Bruyand, élève du Lycée de Troyes.

Trouver le plus petit nombre qui, divisé par 2, *donne pour reste* 1 ; *divisé par* 3 *donne pour reste* 2 ; *divisé par* 4 *donne pour reste* 3,.... *et qui divisé par* 10 *donne pour reste* 9.

Nous remarquerons que le reste est toujours moindre d'une unité que le diviseur.

Le nombre cherché doit être un commun multiple des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, diminué d'une unité; comme on demande le plus petit, c'est le plus petit commum multiple de ces nombres diminué d'une unité. Or on a $2 = 2$; $3 = 3$; $4 = 2^2$; $5 = 5$; $6 = 2 . 3$; $7 = 7$; $8 = 2^3$; $9 = 3^2$; $10 = 2.5$, le p. p. c. m. de ces nombres est donc égal à $2^3 . 3^2 . 5 . 7 = 2520$ et le nombre demandé est $2520 - 1$ ou 2519.

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Demortain, de Doullens ; Perrin, de Clermont-Ferrand.

CONCOURS GÉNÉRAL 1874.

Classe de troisième.

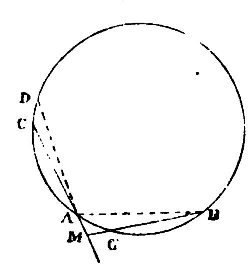
1re Question.

Solution par M. Perrin, élève du Lycée de Clermont-Ferrand.

On donne un cercle et deux points fixes A *et* B *sur la circonférence. Par ces deux points on mène deux cordes égales et de grandeur quelconque. Trouver le lieu du point de rencontre de ces cordes.*

Nous examinerons deux cas selon que les cordes sont portées dans le même sens ou dans le sens contraire.

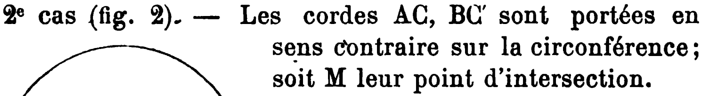
1er cas (fig. 1). — Soit M le point d'intersection des droites AC et BC' portées dans le même sens sur la circonférence. L'angle AMB a pour mesure la moitié de l'arc ACB moins la moitié de l'arc AC'. Joignons AB et prenons sur l'arc ACB une longueur AD = BA. L'angle DAB a pour mesure la moitié de l'arc DNB ou la moitié de l'arc CNB moins la moitié de l'arc CD. Or arc CD = arc AC'.



Donc l'angle M est égal à l'angle DAB, c'est-à-dire constant. Alors le lieu du point M est un segment de cercle, décrit sur AB, et capable de l'angle DAB.

2e cas (fig. 2). — Les cordes AC, BC' sont portées en sens contraire sur la circonférence; soit M leur point d'intersection.

L'angle ABC' a pour mesure la moitié de l'arc ACC'; l'angle BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC'C. Or arc BC' = arc AC, donc ABC' = BAC, donc le lieu du point M est la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite AB.



2e QUESTION.

Par le même.

Démontrer que si la somme $3^n + 1$, *dans laquelle* n *représente nombre entier, est un multiple de* 10, *la somme* $3^{n+4} + 1$ *est aussi un multiple de* 10.

En effet, si $3^n + 1$ est divisible par 10, on a identiquement $3^n + 1 = 10 \cdot q$

ou $3^n = 10 \cdot q - 1$

or $3^{n+4} + 1 = 3^n \cdot 3^4 + 1 = (10 \cdot q - 1) \cdot 3^4 + 1$

ou

$3^{n+4} + 1 = \text{m. de } 10 - 3^4 + 1 = \text{m. de } 10 - 81 + 1 = \text{m. de } 10.$

Nota. — Ont résolu cette question : MM. Demortain, de Doullens; Bruyand, de Troyes; Trokay, de Liége.

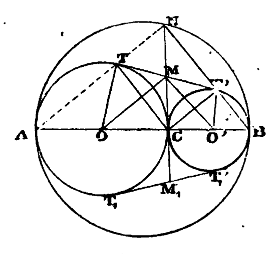
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 71.

Solution par M. Huet, élève au Lycée Saint-Louis.

Sur une droite constante AB, *on prend un point variable* C, *et on décrit les circonférences ayant* AC *et* BC *pour diamètres. Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures et de la tangente commune intérieure.* (Julliard.)

Les deux tangentes extérieures TT′, T_1T_1' aux cercles O et O′ sont rencontrées par la tangente intérieure CM en deux points M et M_1 symétriques par rapport à AB. Il suffira donc de chercher le lieu du point M. Or les angles OMC et OMT étant égaux ainsi que les angles CMO′ et O′MT′, le triangle OMO′ est rectangle en M et l'on a



$$MC^2 = OC \times CO' = \frac{AC \times CB}{4}.$$

Si l'on prolonge MC jusqu'à sa rencontre en N avec la circonférence décrite sur AB comme diamètre on a

$$CN^2 = AC.\ CB = 4\ MC^2$$

d'où

$$CN = 2\ MC.$$

Ainsi le point M est le milieu de CN; et le problème est ramené au suivant : *Lieu géométrique des milieux des ordonnées d'un cercle.* — On sait que ce lieu est une ellipse ayant AB pour grand axe, pour petit axe $\frac{AB}{2}$ et pour distance focale $\frac{AB}{2}\sqrt{3}.$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Biette, collége Stanislas; Cottereau, de Châteauroux; Vautré, de Saint-Dié; Dalzon, à Saint-Étienne; Demortain, à Doullens; Perrin, à Clermont; Jullien, à Orléans; Franquet, à Troyes; Chellier à Constantine; Lamy à Cherbourg; Vitrac à Angoulême; Gélinet, lycée d'Orléans.

QUESTION 74.

Solution par M. Schmitz, élève du Lycée d'Orléans.

Trouver trois nombres tels que les produits de chacun d'eux par la somme des deux autres soient 20, 18 *et* 14.

Soient x, y, z, les trois nombres cherchés. Nous aurons à résoudre les équations

(1) $$x(y+z) = 20$$
(2) $$y(x+z) = 18$$
(3) $$z(x+y) = 14$$

Ajoutant membre à membre et divisant par 2 il vient :

(4) $$xy + xz + yz = 26$$

Si de cette équation (4) nous retranchons successivement les équations (1), (2), (3), nous aurons le système

$$yz = 6$$
$$xz = 8$$
$$xy = 12$$

Multipliant membre à membre ces trois équations et

extrayant la racine carrée du produit, on a

$$xyz = 24$$

divisant successivement cette dernière équation par chacune des précédentes, il vient finalement : $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Berthet, d'Annecy ; Bonnamy, Cordeau, Montenot école Lavoisier ; Bussy, de Châteauroux ; Biette, de Stanislas ; Franquet, de Troyes ; Chastang, Lopez de Fonseca, de Pau ; Meneau, de La Rochelle ; Vautré, de Saint-Dié ; Jordan, à Montpellier ; J. Dilhan, à Castres ; Chellier, à Constantine ; Vitrac, lycée d'Angoulême ; Thual, à Lorient ; Merieult, au Havre ; Hugentobler, à Boppelsen ; Courme, Canuet, Marcelin, Lamy, Leblond, à Cherbourg ; Gélinet, Huet, à Orléans ; Trokay, à Liége ; Delieux, à Toulouse ; Dusseaux ; à Nancy ; Parodez, Duboscq, Robin, de Mont-de-Marsan ; Junck Alphonse, de Longwy ; Dupuy, Grenoble.

QUESTIONS PROPOSÉES

106. — Sur une ellipse donnée on prend un point M et l'on mène les rayons vecteurs de ce point MF, MF'. A partir du sommet A du grand axe, on porte sur le grand axe AP = MF et l'on élève en ce point l'ordonnée PQ.

Cette ordonnée est égale à la normale MN du point M arrêtée en N à l'axe AA'.

Ce théorème fournit un moyen graphique très-simple de construire la normale à l'ellipse et par suite la tangente.

Collignon.

107. — Dans tout parallélépipède la somme des carrés des arêtes est égale à la somme des carrés des diagonales.

F. Burnier.

108. — La somme des carrés des arêtes d'un tétraèdre est égale à quatre fois la somme des carrés des droites qui joignent les milieux des arêtes opposées.

F. Burnier.

CORRESPONDANCE.

Nous recevons de M. Burnier, de Lausanne, une note intéressante sur l'extraction abrégée de la racine carrée. Il nous paraît utile de la communiquer à nos lecteurs.

Soit N un nombre entier ou décimal, soit a une partie trouvée de la racine, sous forme de nombre décimal.

Proposons-nous d'évaluer approximativement l'erreur :

$$\sqrt{N} - a = \frac{N - a^2}{\sqrt{N} + a} = \frac{R}{\sqrt{N} + a}$$

en désignant par R le reste de l'opération.

Si nous désignons par e l'erreur commise en prenant a pour la racine on pourra écrire

$$\sqrt{N} - a = \frac{R}{2a + e}.$$

Prenons pour le second membre $\frac{R}{2a}$, nous commettrons au diviseur et par suite au quotient une erreur relative

$$\varepsilon = \frac{e}{2a + e} < \frac{e}{2a}$$

Cela posé, admettons que a ait n chiffres exacts, à partir du premier chiffre significatif à gauche, l'erreur e sera moindre qu'une unité du n^e rang à partir du premier chiffre significatif à gauche, d'ailleurs a et par suite *ra* sera supérieur à 10^{n-1}. unités de ce même rang, donc ε sera moindre $\frac{1}{10^{n-1}}$ et l'on pourra compter sur $n - 1$ chiffres dans l'évaluation de $\sqrt{N} - a$ par $\frac{R}{2a}$ · En d'autres termes on trouvera $n - 1$ chiffres nouveaux de la racine, avec les n dejà trouvées.

Il y a plus, si le premier chiffre de a vaut 5 ou plus, $2a$ sera supérieur à 10^n unités du n^e rang, et l'erreur e sera moindre que $\frac{1}{10^n}$, donc on pourra compter sur n chiffres dans l'évaluation de $\sqrt{N} - a$ par le quotient $\frac{R}{2a}$

On peut donc formuler le théorème suivant:

Théorème. — *Quand on connaît* n *chiffres d'une racine carrée, on peut toujours en obtenir* n — 1 *nouveaux, en divisant le reste par le double de la racine obtenue. — Cette division en fournit même* n *nouveaux, si le premier chiffre de la racine est* 5 *ou plus.*

Remarque. — Quand nous disons que l'on a n chiffres exacts dans un nombre, nous entendons que l'erreur est moindre qu'une unité du n^e rang, soit en plus, soit en moins. Il résulte de là que la partie entière du quo-

tient $\frac{R}{2a}$ fait connaître $n - 1$, ou n chiffres nouveaux par défaut ou par excès. Voici comment on s'y prend pour reconnaître le sens de l'approximation.

Désignons par q le quotient par défaut et par ρ le reste, nous aurons

$$R = N - a^2 = 2a\rho + q$$

donc $$N = (a + q)^2 + \rho - q$$

donc : 1° Si $q^2 < \rho$, $a + q$ est la racine par défaut
2° Si $q^2 = \rho$, $a + q$ est la racine exacte
3° Si $q^2 > \rho$, $a + q$ est la racine par excès.

Rectifications. — M. Barrieux, professeur au lycée de Mont-de-Marsan, nous fait remarquer que la solution de la question 58 (page 58) est erronée. Voici ce qu'il faut y substituer :

Soient

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a'}{b''} \ldots = \frac{a}{p}$$

plusieurs fractions égales, soit $\frac{m}{p}$ la fraction irréductible que représente leur valeur commune. On sait que b, b', b''... sont des multiples de p, donc leur plus grand commun diviseur Δ sera aussi un multiple de p. Multiplions toutes les fractions par Δ, il viendra :

$$\frac{a}{q} = \frac{a'}{q'} = \frac{a''}{q''} \ldots = \frac{m\Delta}{p}$$

q, q', q'', . . . étant les quotients de b. b', b'', divisés par Δ.

Or $\frac{m\Delta}{p}$ est un nombre entier E, d'après ce que nous avons dit plus haut,

donc : $$a=q\,E,\ a'=q'E,\ a''=q''\,E$$

c. q. f. d.

M. Barrieux nous indique aussi une omission dans la solution de la question 67. Le facteur $(x + r) = o$ a été supprimé dans l'équation en x et par suite la série des nombres $= 1$, 0, $+ 1$ qui satisfont à l'énoncé.

Nous avons reçu trop tard pour les signaler dans notre dernier numéro les solutions suivantes : 57, MM. Lamy, de Cherbourg ; Junck, de Longwy ; Dulzon, de Saint-Etienne. 58, M. Demortain. 62, M. Vitrac, d'Angoulême. 64, M. Demortain. 65, MM. Lamy ; Lerossay, de Liége ; Guilloux, à Sainte Barbe. 67, MM. Marcelin, de Cherbourg ; Robin, de Mont-de-Marsan ; Demortain ; Guilloux, à Sainte-Barbe. 69, M. Lamy.

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

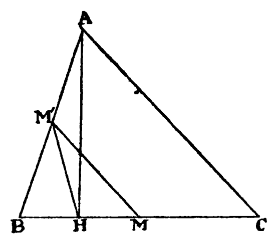
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 1814-8.

SUR LE CERCLE DES NEUF POINTS

par M. R. **Malloizel,** professeur à Sainte-Barbe.

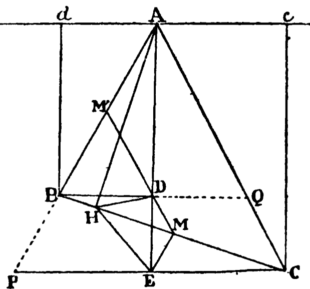
Théorème I. — *L'angle inscrit dans le segment du cercle des neuf points déterminé par le côté* BC *du triangle* ABC *a pour valeur la différence des angles* B *et* C *du triangle.*

En effet, si M′ est le milieu du côté AB, on sait que MM′ est parallèle à AC, et que par suite M′MB = ACB. D'autre, part, le triangle AHB étant rectangle en H, la ligne M′H est égale à M′B, et le triangle M′HB étant isoscèle, on a M′HB = M′BH. Donc l'angle HM′M, différence des deux angles précédents, est bien égal à la différence entre les angles B et C du triangle.



Théorème II. — *Si l'on mène la bissectrice de l'angle en* A *du triangle* ABC, *et si l'on abaisse les perpendiculaires* BD *et* CE *des points* B *et* C *sur cette bissectrice, le quadrilatère* DHEM *est inscriptible.*

Pour le prouver, prolongeons CE jusqu'à sa rencontre en P avec le côté BC. Le triangle APC est isoscèle, puisque la bissectrice de l'angle en A est perpendiculaire sur la base. Donc E est le milieu de PC, et comme M est le milieu de BC, EM est parallèle à BA. Donc MED $=\frac{A}{2}$.



Mais le quadrilatère ABHD est inscriptible puisque les angles BHA, BDA sont droits.

Donc DHM = BAD = $\frac{A}{2}$. Les deux angles DHM, DEM sont par suite égaux, et le quadrilatère DHME est inscriptible.

On démontrerait de même que si l'on mène la bissectrice de l'angle extérieur en A, et que l'on projette les points B et C en *d* et *e* sur cette bissectrice, le quadrilatère *e*HM*d* est inscriptible.

Corollaire I. Le quadrilatère AHEC est inscriptible ; par suite, l'angle HEA est égal à l'angle HCA ou à l'angle C. Donc l'angle HEM est égal à $\frac{A}{2} + C$.

Corollaire II. L'angle DMH est égal à DEH, et par suite à ACH. Donc MD est parallèle à AC. Mais le point M est le milieu de BC. Donc la droite MD passe par le point M′. Il est facile de voir que *d* est sur cette même droite.

De la même manière, on voit que le parallèle à AB, qui passe par le point M et aussi par le milieu M″ de AC, passe par les points E et *e*.

Théorème III. *Le centre de chacune des circonférences précédentes se trouve sur le cercle des neuf points du triangle* ABC.

En effet, prenons d'abord le centre O de la circonférence HDME. L'angle HOM est double de l'angle HEM. Il a donc pour valeur $2\left(\frac{A}{2} + C\right)$, ou $2C + A$.

Mais l'angle HM′M est égal à B — C (Th. 1). Donc la somme des angles HM′M et HOM est égal à $B - C + 2C + A$ ou $A + B + C$, ou 180°. Le centre O est donc sur le cercle des neuf points.

De même, l'angle H*d*M est égal à $\frac{B}{2} - \frac{C}{2}$, car M*d*A = $\frac{B}{2} + \frac{C}{2}$, et le quadrilatère inscriptible AHB*d* donne H*d*A = B. Donc H*d*M, différence des deux précédents, est égal à $\frac{B}{2} - \frac{C}{2}$, et par suite l'angle au centre HO′M, double du précédent, est égal à B — C, ou a HM′M. Son sommet est donc sur le cercle des neuf points.

Il est facile de voir que, en prenant les autres bissectrices on obtiendrait quatre nouveaux points, appartenant à ce cercle des neuf points, qu'on pourrait appeler ainsi le *cercle des quinze points*. O et O′ sont les extrémités d'un diamètre de ce cercle perpendiculaire à HM.

Nota. — L'énoncé de ce théorème m'a été communiqué il y a neuf ans par M. Calabre, actuellement lieutenant d'artillerie.

ÉTUDE SUR LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE

par F. R. A.

(*Suite*, voir page 65.)

VI. Propriétés de l'Exponentation ou des Rapports algébriques.

Les propriétés des Rapports arithmétiques se confondent avec celles de la Soustraction; les propriétés des Rapports géométriques ne sont autres que celles de la Division ou des expressions fractionnaires; de même les propriétés des Rapports algébriques sont aussi les propriétés de l'Exponentation, et l'étude peut en être faite sous l'un ou l'autre aspect indifféremment.

1° *Dans tout rapport algébrique, l'antécédent égale le conséquent élevé à une puissance marquée par la raison.*

Par exemple, si a (:) $c = r$, on peut poser $a = c^r$, puisque la raison r exprime combien de fois c est facteur dans a.

2° *Si l'antécédent d'un rapport algébrique est multiplié ou divisé par un nombre égal au conséquent, la raison est augmentée ou diminuée de* 1.

Car le conséquent sera une fois de plus ou une fois de moins facteur dans l'antécédent.

Si donc $\frac{a}{c} = r$, on aura $\frac{ac}{c} = r + 1$, et $\frac{a : c}{c} = r - 1$.

3° *Si l'antécédent d'un rapport algébrique est élevé à une puissance ou si on en extrait une racine, la raison est multipliée ou divisée par le degré de la puissance ou de la racine.*

Soit le rapport 8 (:) 2 qui a pour raison 3; si l'on remplace 8 par 8^2, 8^3... 8^m, il y aura 2, 3... m facteurs 8, et par conséquent 2 fois, 3 fois... m fois trois facteurs 2...

Remarque. Dans l'énoncé, on pourrait se contenter de mentionner le cas d'une puissance formée, car une racine 2e, 3e... me, n'est autre chose qu'une puissance 1/2, 1/3... $1/m$.

4° *Si le conséquent d'un rapport algébrique est élevé à une puissance quelconque, la raison est divisée par le degré de cette puissance.*

Soit a (:) $c = r$; le conséquent c étant r fois facteur dans a, c^2 y sera 2 fois moins facteur, c^3, 3 fois moins, c^n, n fois moins...

5° *Si les deux termes d'un rapport algébrique sont élevés à une même puissance ou si l'on en extrait une même racine, la raison n'est pas changée.*

Car la raison est à la fois multipliée et divisée par un même nombre.

6° *Le rapport algébrique de deux puissances quelconques d'un même nombre est égal au rapport géométrique des exposants.*

Par exemple $\frac{2^5}{2^3} = \frac{5}{3}$.

En effet, on a 2 (:) 2 = 1; si l'on élève l'antécédent à la 5e puissance, la raison sera multipliée par 5; et si l'on élève le conséquent à la 3e puissance, la raison sera divisée par 3; on a donc $\frac{2^5}{2^3} = 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$.

Pour vérifier que 2^5 (:) 2^3 ou 32 (:) 8 égale 5/3, il suffit de faire voir que $8^{\frac{5}{3}} = 32$; or $8^{\frac{5}{3}} = 8^{\frac{1}{3}\cdot 5} = (\sqrt[3]{8}\,)^5 = 2^5 = 32$.

7° *Si l'on renverse un rapport algébrique, la nouvelle raison est le nombre inverse de la raison primitive.*

Par exemple, 8 (:) 2 = 3, il en résultera 2 (:) 8 = 1/3.

En effet, puisque 8 (:) 2 = 3, le nombre 2 est la racine 3e de 8; on a donc $\sqrt[3]{8} = 2$, ou $8^{\frac{1}{3}} = 2$; ainsi, lorsqu'on considère 2 comme puissance et 8 comme racine, le degré est 1/3; donc, d'après la notion même de l'Exponentation, 2 (:) 8 = 1/3.

8° *Pour faire la somme ou la différence de deux rapports algébriques ayant même conséquent, il suffit de faire le produit ou le quotient des antécédents, et de poser le conséquent primitif.*

Par exemple, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$, et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a:b}{c}$ (1)

Pour plus de clarté, supposons que a contienne 5 facteurs c, et que b en contienne 3; on a a (:) $c = 5$, et b (:) $c = 3$; donc ab (:) $c = ccccc.ccc$ (:) $c = 8$;

De même $\frac{a:b}{c} = \frac{ccccc:ccc}{c} = \frac{cc}{c} = 2.$

Remarque. La réciproque de la propriété est vraie : toute expression de la forme ab (:) c égale a (:) $c + b$ (:) c.

(*A suivre.*)

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877.

ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

QUESTION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

par **A. Bougueret,** professeur à l'École J.-B. Say.

On donne, dans le plan vertical de projection, un hexagone régulier dont un côté, égal à 4 centimètres, coïncide avec la ligne de terre; cet hexagone est l'une des bases d'un prisme oblique dont les arêtes sont horizontales, et forment un angle de 60° avec la ligne de terre; la seconde base du prisme est dans un plan parallèle au plan vertical situé à 12 centimètres en avant de ce plan. Sur la face supérieure du prisme repose une sphère qui a 4^{cm} *de rayon, et qui touche le plan de la face supérieure de prisme au centre du parallélogramme formé par cette face.*

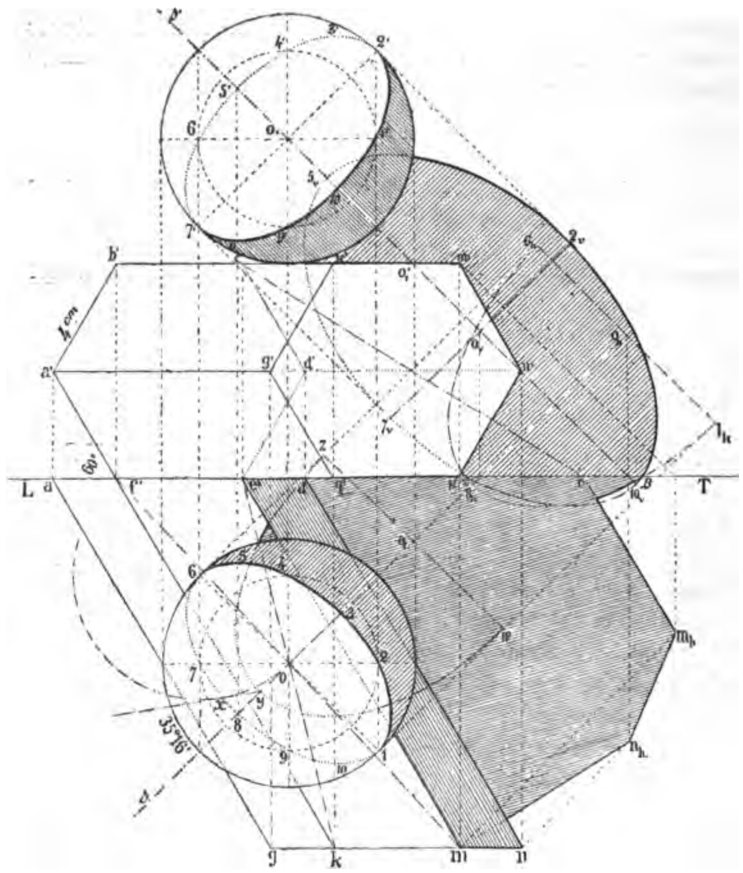
On demande de représenter le système de ces deux corps solides et de dessiner leurs ombres propres, l'ombre portée par la sphère sur le prisme et les ombres portées par les deux corps sur les plans de projection.

On supposera le système éclairé par la lumière dite à 45°.

(1) On peut, avec une restriction convenue, lire a sur c, b sur c...

1° Projections des deux solides.

Sur la ligne de terre, on prend une longueur *e'f'* égale 4cm, sur laquelle on construit un hexagone régulier qui est une base du prisme; à partir des points *a, f, e', d*, on



mène des lignes faisant 60° avec la ligne de terre et on les prolonge jusqu'à une ligne *gn*, parallèle à LT, et située à 12cm en avant; enfin, on construit l'hexagone régulier *g'k'm'n'p'q'*, égal au premier, et l'on a les deux projections du prisme.

Pour avoir les projections de la sphère, on mène les diagonales du parallélogramme $kme'f'$: leur intersection est la projection horizontale du centre de cette sphère, lequel a sa projection verticale au point o', situé à 4^{cm} au-dessus du prisme ; on n'a plus qu'à tracer 2 circonférences des points o, o' comme centres, avec 4^{cm} de rayon.

Il faut remarquer que la sphère cache une partie de la projection horizontale des arêtes du prisme et que ces arêtes pouvaient être tracées dans une autre direction.

2° Ombres propre et portée du prisme.

On considère le prisme comme s'il était seul, et l'on voit que, parmi toutes les faces qui sont vues, soit en projection horizontale, soit en projection verticale, il n'y en a qu'une dans l'ombre propre : c'est la face $mnde'$.

Pour avoir l'ombre portée sur les plans de projections, il faut suivre le rayon lumineux dans sa marche autour du prisme en commençant, par ex., au point inférieur m, p' et en suivant d'abord l'arête mn, $p'n'$. Le point m, p', situé dans le plan horizontal, est un point d'ombre ; le point n, n' porte ombre en n_h, et l'arête considérée porte ombre suivant mn_h. Le point supérieur m, m' porte ombre en m_h, et l'arête nm, $n'm'$, suivant $n_h m_h$. Le rayon lumineux, arrivé au point mm', rase l'arête horizontale me', $m'c'$ et forme un plan qui rencontre le plan horizontal suivant une ligne $m_h r$, parallèle à me', ce qui achève de limiter l'ombre portée par le prisme sur le plan horizontal. Cette dernière ligne d'ombre rencontre le plan vertical au point r', puis elle se relève pour venir passer au point c', situé dans le plan vertical.

3° Ombres propre et portée de la sphère.

Le lieu des points de contact des rayons lumineux avec la sphère, c'est-à-dire la *ligne de séparation d'ombre et de lumière*, est un grand cercle, dont le plan est perpendiculaire à la ligne so, $s'o'$ qui indique la direction des rayons lumineux. Ce cercle est également incliné sur les deux plans de projections ; il se projette suivant deux ellipses égales dont les grands axes sont 1,6 sur le plan horizontal, et 2'7' sur

le plan vertical. Le petit axe de la première est situé sur *so*; il divise cette ellipse en deux parties symétriques, et ses deux extrémités sont le point le plus haut et le point le plus bas du cercle de l'espace. Le petit axe de la seconde est situé sur *s'o'*; il divise cette ellipse en deux parties symétriques, et ses deux extrémités sont le point le plus en avant et le point le plus en arrière du cercle de l'espace.

Pour avoir les deux points situés sur *so*, on rabat le plan vertical projetant cette ligne sur le plan horizontal sur lequel repose la sphère. Dans ce mouvement, le centre de la sphère tombe au point 6, et l'un des deux rayons lumineux qui sont contenus dans ce plan se rabat suivant xy en faisant avec *so* un angle $\Phi = 35^{\circ}\ 16'$. (On sait que les projections du rayon lumineux font 45° avec la ligne de terre et que le rayon lui-même qui est une diagonale d'un cube, fait un angle plus petit, facile à calculer et qui a été trouvé égal à $35^{\circ}\ 16'$.)

En relevant le plan rabattu, le point de contact x se projette au point 8. Il ne reste plus qu'à porter la longueur o8 de chaque côté du grand axe sur les deux plans de projections et à tracer les deux ellipses au moyen des axes. Cependant, au lieu d'employer une des méthodes connues pour la construction d'une ellipse, il est plus simple de faire les remarques suivantes : les points 1 et 6 de la projection horizontale donnent les points 1' et 6' de la projection verticale; le point 6' a son symétrique par rapport à *s'o'*, au point 4', et le point 1', son symétrique en 9'; de même, les points 2' et 7' donnent 2 et 7, et, à cause de la symétrie par rapport à *so*, ces derniers donnent 4 et 9. On a ainsi 8 points de chaque ellipse, dont 4 sur une circonférence ayant o2 pour rayon, ce qui est suffisant pour le tracé. On sait, d'ailleurs, que les points de la projection verticale correspondant à 3 et 8, de même que les points de la projection horizontale correspondant à 5' et 10', sont sur des tangentes horizontales aux ellipses.

Quant à l'ombre portée par la sphère, il est facile de voir sur la figure, qu'elle ne peut exister que sur la face horizontale supérieure du prisme et sur les deux plans de pro-

jections, attendu que la face inclinée *mnde'* est dans l'ombre propre et que les rayons lumineux passent au-dessus sans la toucher.

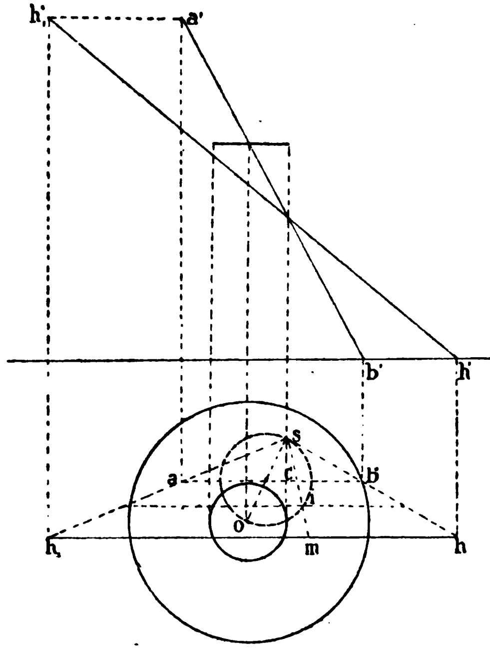
On pourrait faire passer des rayons lumineux par un certain nombre de points des ellipses, particulièrement par les points 11', 22', 33', etc., et trouver les traces de ces rayons sur la face horizontale du prisme et sur les plans de projections, mais il est beaucoup plus simple de remarquer que le *cylindre lumineux* qui entoure la sphère est coupé par ces trois plans suivant trois ellipses identiques et qu'il suffit de trouver les axes de ces ellipses pour les tracer, sauf à supprimer ensuite les parties qui se recouvrent mutuellement et celles qui sont cachées par les projections des solides. Ainsi le cylindre lumineux en question rencontre le plan horizontal *kme'f'*, *b'm'* suivant une portion d'ellipse dans le centre est en o_1, o'_1, dont le petit axe est la ligne *wz*, égale et parallèle à 16, et dont une extrémité du grand axe est au point *y*.

On verrait de même que le cylindre lumineux rencontre le plan horizontal de projections suivant une ellipse dont le petit axe est 1_h 6_h et le demi-grand axe o_h 8_h ; qu'il rencontre le plan vertical suivant une ellipse dont les axes sont 7_v 2_v et 5_v 10_v . Ces deux dernières ellipses se rencontrent sur la ligne de terre aux points *α* et 6.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION

Le problème de l'intersection d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution fait partie du programme de l'École centrale. Nous croyons donc être utile à nos lecteurs en leur donnant de cette question une solution très-simple, due à Barbier, et qui ne s'appuie que sur des considérations de géométrie élémentaire. Elle présente ainsi, sur la solution de Leroy et sur d'autres solutions connues l'avantage de pouvoir être traitée directement, sans supposer *a priori* des notions



qui ne font que compliquer inutilement la question.

Considérons la droite donnée, que nous pouvons toujours supposer de front, et la génératrice de front. Les projections horizontales de ces deux lignes sont parallèles. Le point d'intersection de la droite donnée et de la surface appartient à un certain parallèle qui se projette horizontalement suivant un cercle ayant pour centre le point O. La droite AB et la droite HH_1 de l'espace limitées au plan horizontal et à un plan de niveau quelconque sont partagées par ce parallèle inconnu en parties proportionnelles. En désignant par M le point d'intersection cherché, et par C le point du parallèle qui se trouve sur AB, on a : $\frac{HM}{MH_1} = \frac{BC}{CA}$.

Or, en projetant une droite sur un plan, le rapport des segments ne change pas ; on aura donc :

$$\frac{hm}{mh_1} = \frac{bc}{ca}.$$

Mais les droites *ab* et hh_1 sont parallèles; donc les droites h_1a *hb* et *mc* passent par un même point *s*.

Soit *i* le milieu de *mc*. Ce point *i* appartient à une droite équidistante de hh_1 et de *ab*. D'autre part puisque les points *m* et *c* appartiennent à un même parallèle, $om = oc$; donc *ois*

est droit. De là la construction : on prend les projections horizontales des intersections des deux droites HH_1 et AB_1 avec deux plans horizontaux quelconques ; on joint les projections des points correspondants, les lignes ainsi tracées se coupent en un point s. Sur os comme diamètre on décrit une circonférence, qui rencontre en i et j la droite parallèle aux droites ab et hh_1 et qui leur est équidistante ; on mène les lignes sj et si, qui coupent en m et n la droite hh_1 ; m et n sont les projections horizontales des points d'intersection cherchés.

A. M.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PARIS. — SESSION D'AVRIL 1878.

Compositions du 1er avril.

(1) Résoudre un triangle connaissant deux angles et le périmètre ; on rendra les formules finales calculables par logarithmes.

(2) Qu'entend-on par lignes de plus grande pente d'un plan? Démontrer la propriété caractéristique de ces droites.

(3) Une éprouvette maintenue verticalement plonge dans le mercure et contient 100 centimètres cubes d'air sec à 24 degrés. Le niveau extérieur du liquide est le même que le niveau intérieur ; après avoir introduit dans l'éprouvette une couche mince d'eau à 24 degrés, on soulève le tube de manière à rétablir l'égalité de niveau. Quel est alors le volume du mélange gazeux? La pression atmosphérique égale 759 millimètres et la tension de la vapeur d'eau est de 22 millimètres à 24 degrés.

Rép. : $102^{cc}, 985^{mmc}$.

Compositions du 2 avril.

(1) Démontrer que trois forces qui se font équilibre sur un corps solide sont nécessairement dans un même plan, qu'elles passent par un même point, et que la somme algébrique de leurs moments par rapport à un point quelconque de leur plan est égale à o.

(2) Un triangle équilatéral ABC et inscrit dans un cercle de rayon donné R ; on fait tourner la figure autour du diamètre AD passant par le sommet A. Calculer le volume engendré par le segment de cercle AMB.

$$\text{Rép.} : V = \frac{3}{4}\pi R^3$$

(3) Induction électrique.

Composition du 3 avril.

(1) Trouver $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$; expliquer *a priori* pourquoi on trouve deux valeurs et pourquoi ces deux valeurs ont pour produit -1.

(2) Trouver l'expression de la surface engendrée par une portion de ligne brisée régulière tournant autour d'un diamètre du cercle inscrit.

On démontrera les théorèmes sur lesquels on aura à s'appuyer.

(3) Définition de la chaleur latente de fusion d'un corps. Déterminer la chaleur latente de fusion de la glace par la méthode des mélanges.

CONCOURS ACADÉMIQUES DIVERS.

ACADÉMIE DE RENNES.

Concours de 1863.

Trois fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d}$ sont telles que l'on ait :

$$ba' - ab' = bc - ad = 1;$$

1° Montrer qu'elles sont irréductibles;

2° Trouver qu'elle est la plus petite;

3° Montrer que c et d sont de la forme $c = ax + a'$, $d = bx + b'$, x étant un nombre entier positif ou négatif, et dire à quelle condition $\frac{c}{d}$ sera compris entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$;

4° En appelant $\frac{c_0}{d_0}$, $\frac{c_1}{d_1}$, $\frac{c_2}{d_2}$, etc. les valeurs que prend $\frac{c}{d}$, quand on fait $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, etc, prouver que l'on a :

$$c_m d_{m+1} - c_{m+1} d_m = 1,$$

et, plus généralement, $c_m d_{m+p} - c_{m+p} d_m = p$; en conclure la valeur de la somme $\frac{1}{d_0 d_1} + \frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d^2 d_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{d_{n-1} d_n}$

(*Mathématiques préparatoires.*)

Concours de 1870.

Dans une circonférence on trace une corde fixe BC, et l'on joint B et C à un point quelconque A de la circonférence; on désigne par b et c les côtés AC et AB du triangle BAC et on mène la bissectrice à l'angle BAC. On demande : 1° de prouver que cette bissectrice passe par un point fixe M; 2° de prouver que le rapport $\frac{AM}{b+c}$ est constant; 3° de trouver le lieu des points P obtenus en prolongeant AM de quantités proportionnelles à $b+c$, $\frac{b+c}{2}$ par exemple; 4° ce que l'on peut dire de la bissectrice de l'angle extérieur adjacent au sommet A du triangle ABC.

(*Mathématiques élémentaires.*)

Concours de 1872.

Trois droites fixes OX, OY et OZ sont coupées par une circonférence qui passe par leur point de rencontre en trois autres points A, B et C : 1° qu'ont de commun les triangles ABC qu'on obtient en menant par le point O diverses circonférences? 2° plusieurs circonférences peuvent-elles donner le même triangle, et quel est le lieu de leurs centres? 3° quelles sont les cir-

conférences pour lesquelles le côté AB serait parallèle à une direction donnée? 4° quelle ligne décrit le milieu de AB, si l'angle XOY est droit, et le rayon de la circonférence qui passe en O constant? (*Mathématiques préparatoires.*)

Concours de 1873.

Dans une circonférence donnée, dont le centre est O, on mène un diamètre AA' fixe, une perpendiculaire MP à ce diamètre, et le rayon OM qui aboutit au point où elle coupe la circonférence; on demande le lieu des centres des cercles inscrits au triangle MOP, quand le point M se meut sur la circonférence. (*Mathématiques élémentaires.*)

Concours de 1875.

On donne trois droites concourantes OA, OB et OC; d'un point B de l'une d'elles on abaisse des perpendiculaires sur les deux autres; par leurs pieds A et C on mène des droites faisant avec OA et OC des angles égaux à α; par le point M, où se coupent ces droites, on mène une perpendiculaire à MB, qui rencontre OA et OC en D et en E : 1° prouver que MD est égal à ME; 2° profiter de cette remarque pour construire un triangle équilatéral ayant ses trois sommets sur trois droites concourantes; 3° quel est le lieu des points M quand B se déplace sur la droite OB?

(*Mathématiques élémentaires.*)

DOUAI 1853.

Deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' sont tels que les quatre lignes AA', BB', CC' et DD' concourent en un même point S; démontrer que les six points de concours des arêtes homologues des deux tétraèdres sont dans un même plan.

CONCOURS GÉNÉRAL DES DÉPARTEMENTS 1863.

On donne deux droites rectangulaires, un point A fixe sur l'une d'elles, et sur l'autre on prend deux points M et P tels que $\frac{OM}{OP} = \frac{m}{p}$; quelles seront les positions de ces points pour lesquelles l'angle MAP sera maximum?

(*Mathématiques élémentaires.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

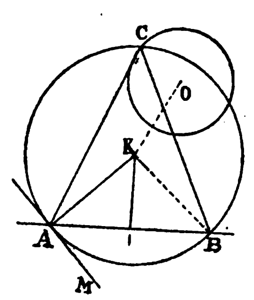
QUESTION 35.

Solution par M. CORDEAU, élève de l'École Lavoisier (Paris).

On donne une circonférence O, *une droite indéfinie* Ax, *et un point* A *sur cette droite. Un angle* C, *de grandeur constante, a son sommet sur la circonférence* O, *et l'un de ses côtés passe*

par le point A. *Déterminer la position du sommet de telle manière que le segment* AB, *intercepté par l'angle sur la droite* Ax, *soit maximum ou minimum.* (Hallowell.)

Le point C doit se trouver sur la circonférence O et sur un segment capable de l'angle C passant par le point A. Ce segment capable a son centre sur la perpendiculaire AK à la ligne AM qui fait avec la droite Ax un angle égal à C. Soit K ce centre.



On a KA = KB = KC comme rayons d'un même cercle.

Le triangle KAB étant isoscèle, la perpendiculaire KI partage la base AB en deux parties égales, donc AI = BI. D'un autre côté, on a AI = AK sin AKI, et comme les angles AKI et xAM sont aigus et ont leurs côtés perpendiculaires on a AKI = C, et par suite, AI = AK sin C ou AI = KC sin C. Le maximum ou le minimum de AI aura lieu lorsque KC sera lui-même maximum ou minimum.

Or, KC, distance d'un point K à une circonférence O, sera maximum ou minimum, lorsque KC passera par le centre O, c'est-à-dire lorsque les deux circonférences K et O seront tangentes.

Elles peuvent être tangentes intérieurement, ce qui donne KC = KO + OC, c'est-à-dire le maximum, ou extérieurement, ce qui donne KC = KO — OC, c'est-à-dire le minimum.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Bernard, de Liége; Demortain, de Doullens; Gélinet, à Orléans; Boudin, à Commercy.

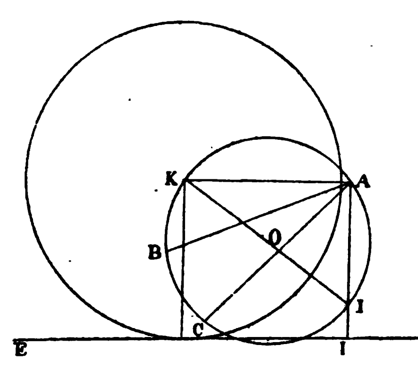
QUESTION 44.

Solution par M. Cordeau, École Lavoisier.

Une figure plane se meut de telle manière que deux droites fixées invariablement à cette figure passent par deux points fixes. Une autre droite quelconque invariablement liée à la figure mobile est toujours tangente à un cercle fixe.

(The Educational Times.)

Les deux droites font entre elles un angle fixe BAC dont le sommet se déplacera sur le segment capable de cet angle, décrit sur BC comme corde, B et C étant les points fixes.



Soit une autre droite EF fixée à la figure. La perpendiculaire AD à EF est fixée à la figure et a une longueur constante. De plus, l'angle BAD est constant et puisqu'un de ses côtés AB passe toujours par le point B, l'autre côté AD passera toujours par le point I et si l'on joint le point I au centre, le diamètre IK est fixe et l'angle KAI droit. Donc AK est parallèle à EF et la droite KR, parallèle à AD est égale à cette droite et par suite constante. La droite EF sera donc constamment tangente à la circonférence décrite de K, comme centre avec KR comme rayon, puisqu'elle est toujours perpendiculaire à l'extrémité du rayon.

QUESTION 45.

Solution par M. Cordeau, à l'École Lavoisier, Paris.

Si l'on pose

$$S_{2p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2p}$$

on a l'identité

$$S_{2p} = (2p + 1)\left(\frac{1}{1 \cdot 2p} + \frac{1}{2(2p-1)} + \frac{1}{3(2p-2)} + \ldots \frac{1}{p(p+1)}\right)$$

(De Longchamps.)

Remplaçant S_{2p} par sa valeur dans la seconde relation et développant le second membre, il vient

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2p} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2p+1}{2p}$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{2p+1}{2p-1} + \frac{1}{3} \frac{2p+1}{2p-2} + \dots + \frac{1}{p} \frac{2p+1}{p+1}$$
$$= \frac{1}{1}\left(1 + \frac{1}{2p}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{2p-1}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2p-2}\right)$$
$$+ \dots + \frac{1}{p}\left(1 + \frac{p}{p+1}\right)$$

Effectuant et ordonnant, on a l'identité :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2p} = 1 + \frac{1}{2}$$
$$+ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \dots$$
$$+ \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p}.$$

Nota. — MM. Perrin, de Clermont-Ferrand, Vautré, Robin, à Mont-de-Marsan, ont résolu la même question.

QUESTION 46.

Solution par M. Vautré, au grand séminaire de Saint-Dié.

Si l'on pose

$$e_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2\dots n}$$

on a $ne_n = (n+1)\, e_{n-1} - e_{n-2}$.

(De Longchamps.)

L'égalité à démontrer peut s'écrire :

$$n(e_n - e_{n-1}) = e_{n-1} - e_{n-2}; \dots \quad (1)$$

Si l'on retranche terme à terme e_{n-1} de e_n, puis e_{n-2} de e_{n-1}, on trouve facilement :

$$e_n - e_{n-1} = \frac{1}{1.2.3\dots n}.$$

$$e_{n-1} - e_{n-2} = \frac{1}{1.2.3..(n-1)}$$

Substituant ces valeurs dans (1), il vient :

$$n \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)\, n} = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)},$$

identité manifeste.

Nota. — **MM. Cordeau, à l'école Lavoisier, et Aubert, à Marseille, ont résolu la même question.**

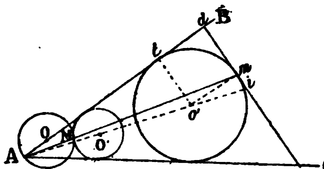
QUESTION 59.

Solution par M. Vautré, élève du Grand Séminaire de Saint-Dié.

On a un angle BAC; *par le sommet* A *on fait passer un cercle* O, *ayant son centre sur le côté* AB; *puis l'on considère le cercle* O', *tangent au premier et aux deux côtés de l'angle. Lieu géométrique du point de contact* M *de ces deux cercles.*

(Julliard.)

Transformons la figure en prenant pour pôle d'inversion le point A.



Le cercle O' devient le cercle o', tangent au point t à la droite AB. Le cercle O passant par le pôle devient une droite dm, qui coupe à angle droit la droite AB au point d, touche le cercle o' au point m, et rencontre au point i la bissectrice AO'.

Menons $o'm$, $o't$. — La figure $o'mdt$ est un carré; par suite on a :

$$\frac{mi}{md} = \frac{o'i}{o'A} = \frac{td}{tA} = \frac{to'}{tA}$$

ou, en rapprochant les rapports extrêmes :

$$\frac{mi}{md} = \text{tang BAO'} = \text{constante}.$$

Mais les droites Ad et Ai sont fixes, et la droite di est toujours parallèle à elle-même; donc le point m, qui divise cette dernière droite dans un rapport constant, a pour lieu une droite passant au point A. Il en est évidemment de même de son réciproque M.

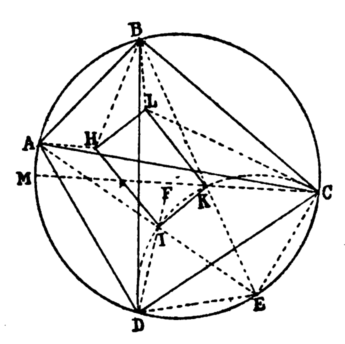
Nota. — **La même question a été résolue par M. Dalzon, de Saint-Étienne.**

QUESTION 60.

Solution par M. Vautré, élève du Grand Séminaire de Saint-Dié.

Les centres des cercles inscrits dans les quatre triangles formés par deux côtés et une diagonale d'un quadrilatère inscriptible, sont les sommets d'un rectangle. (Thual.)

Les centres H, I, K, L des cercles inscrits dans les triangles ABD, ACD, BCD, ABC, sont déterminés par les bissectrices AH, BH; AIE, DI; BKE, CK; BL, CL; tirons HI, HL, KI, KL, CE, DE.



On a

$$KCE = \frac{1}{2} \text{ arc DM} + \frac{1}{2} \text{ arc DE} = \frac{1}{2} \text{ arc BM} + \frac{1}{2} \text{ arc CE} = CKE$$

d'où $$EC = EK$$

De même $$DIE = IDE$$

d'où $$ED = EI = EK = EC$$

C'est-à-dire que les points D, I, K, C sont sur la circonférence ED.

Par suite $$FIK = \frac{1}{2} \text{ arc KD} = KCD$$

on trouverait de même $FIH = HAD$

d'où $$FIK + FIH = KCD + HAD$$

ou $$KIH = \frac{1}{2} BCD + \frac{1}{2} BAD = 1 \text{ droit}.$$

La même démonstration s'appliquant aux trois autres angles du quadrilatère HIKL, ce quadrilatère est un rectangle.

Remarques. I. — Soit O le centre du cercle circonscrit au quadrilatère ABCD et J le milieu de l'arc AB. Si l'on

construit le triangle OAJ, il sera semblable au triangle isoscèle IEK car les angles en O et en E auront même mesure.

On aura donc $$\frac{KI}{BJ} = \frac{KE}{OB}$$

d'où $$KI = \frac{KE \cdot BJ}{OB}$$

en posant $KE = CE = c$, $BJ = a$, $oB = R$

on a $$IK = \frac{ac}{R}$$

En désignant par b et d les cordes qui soutiendraient les arcs $\frac{AD}{2}$ et $\frac{BC}{2}$ on trouverait de même.

$$HI = \frac{bd}{R}$$

Par suite aire $HIKL = HI \cdot IK = \frac{abcd}{R^2}$.

II.— Tirons EJ; cette droite à la fois bissectrice des angles IEK, HGL, est perpendiculaire sur les milieux de IK et de HL; la droite PR qui joindrait les milieux des arcs AD et BC serait de même perpendiculaire sur les milieux de HI et de KL. On peut dès lors déterminer facilement le centre du rectangle HIKL. Il est d'ailleurs facile de démontrer à priori que les droites EJ et PR sont perpendiculaires entre elles.

Nota. — Ont résolu la même question : M. Loritz, de Nancy; Franquet, Bruyand, à Troyes; Chellier, à Constantine.

QUESTION 61.

Solution par M. Bernard, de Liége.

Résoudre les deux équations

$$x^y = y^x$$
$$x^p = y^q$$

Relations qui doivent exister entre p *et* q *pour que* x *et* y *soient rationnels.* (Weill.)

Ce système peut s'écrire $x = y^{\frac{y}{x}}$

$$x = y^{\frac{q}{p}}$$

donc $$x^{\frac{x}{y}} = y^{\frac{p}{q}}$$

et par suite $$\frac{x}{y} = \frac{q}{p} \text{ ou } x = \frac{q}{p}\, y.$$

Substituons dans la seconde équation cette valeur de x

il vient $$y = \sqrt[p-q]{\left(\frac{q}{p}\right)^p}$$

un calcul analogue donnerait

$$x = \sqrt[q-p]{\left(\frac{q}{p}\right)^q}$$

x et y seront rationnels si p et q sont des multiples de $p-q$, ou simplement de p, si l'on suppose $q > p$. On doit donc avoir

$$\frac{p}{q-p} = n,$$

n étant un nombre entier quelconque. Cette égalité peut s'écrire $\frac{p}{q} = \frac{n}{n+1}$. Telle est la relation demandée.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Aurenty, de Marseille; Coye, pensionnat Saint-Louis, Saint-Etienne; Brice, de La Flèche; Montenot, de Troyes; Lamy, Leblanc, Marcelin, de Cherbourg; Demortain de Doullens; Jordan, de Montpellier.

QUESTION 63.

Solution par M. Vautré, élève du Grand Séminaire de Saint-Dié.

Reconnaître que les trois équations

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + c = 0; \quad \frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} + c = 0,$$

$$(b+c)\,x + (a+c)\,y + (a+b) = 0$$

sont compatibles. (de Longchamps).

Posons $$X_1 = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + c; \quad (1)$$

$$(A) \qquad X_2 = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} + c; \qquad (2)$$

$$X_3 = (b+c)\,x + (a+c)\,y + (a+b) \quad (3)$$

multipliant les deux nombres de (1) par $x + y + xy$, on a

$$X_1(x+y+xy) = \Big[(b+c)\,x + (a+c)\,y + (a+b)\Big]$$
$$+ \left[\frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} + cyx\right]$$

ou en vertu des relations (A)

$$X_1\,(x+y+xy) = X_3 + X_2\,xy$$

ou encore $\quad X_1\,(x+y+xy) - X_2\,xy - X_3 = 0.$

Cette équation montre que si $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$, il en résulte $X_3 = 0$. Si $X_1 = 0$ et $X_3 = 0$, il vient $X_2 = 0$, pourvu que l'on n'ait pas $x = 0$ ou $y = 0$. Enfin si $X_2 = 0$ et $X_3 = 0$, il s'ensuit $X_1 = 0$, pourvu que l'on n'ait pas $x + y + xy = 0$.

Les équations proposées sont donc généralement compatibles.

Nota. — La même question a été résolue par M. Trokay, de Liége.

QUESTION 72.

Solution par M. Lopez de Fonseca, élève au Lycée de Pau.

Deux mobiles se déplacent sur deux axes rectangulaires et se dirigent avec des vitesses v *et* v′ *vers le point d'intersection de ces axes, dont ils sont, à un moment donné, à des distances* a *et* b. *A quel instant ces deux mobiles sont-ils le plus proche l'un de l'autre?*

Soit x le temps qui s'écoule jusqu'à cet instant, la quantité à rendre minima est $\sqrt{(a - vx)^2 + (b - v'x)^2}$. En égalant cette quantité à m élevant au carré il vient

$$(V^2 + v'^2)\,x^2 - 2\,(bv' + av)\,x + a^2 + b^2 - m^2 = 0$$

d'où $$x = \frac{av + bv' \pm \sqrt{m^2(v^2 + v'^2) - (bv + av')^2}}{v^2 + v'^2}$$

Le minimum aura lieu pour

$$m = \frac{bv + av'}{v^2 + v'^2}$$

et par suite

$$x = \frac{bv' + av}{v^2 + v'^2}.$$

Si $v = v'$,

$$x = \frac{a + b}{2v};$$

Remarque. — Cette question se résout d'une manière analogue si les deux axes font entre eux un angle ω ; dans ce cas on trouve

$$x = \frac{av + bv' - (av' + bv') \cos \omega}{v^2 + v'^2 - vv' \cos \omega}.$$

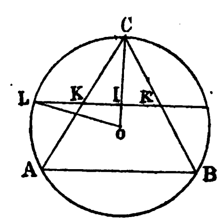
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Cordeau, école Lavoisier; Vautré, de Saint-Dié; Dilhan, de Castres; Franquet, de Troyes; Trokay, de Liége.

QUESTION 73.

Solution par M. Vautré, élève du Grand Séminaire de Saint-Dié.

Un cône équilatéral étant inscrit dans une sphère, déterminer entre quelles limites peut varier la différence des sections faites dans ces deux corps par un plan parallèle à la base du cône.

Soient O et ABC le cercle et le triangle générateurs. Les sections de la sphère et du cône, nulles quand le plan est tangent en C, sont égales quand il passe en AB, et inégales quand il occupe la position intermédiaire IKL. Leur différence S part donc de zéro pour revenir à zéro en passant par un maximum qu'il s'agit de déterminer.



On a $S = \pi (\overline{IL}^2 - \overline{IK}^2)$; (1).

Si l'on pose $OC = R$, $IC = x$, il vient :

$$\overline{IL}^2 = R^2 - (R - x)^2 = 2Rx - x^2;$$

d'ailleurs KK' est parallèle à AB; donc le triangle KK'C est

équilatéral comme ABC; par suite :

$$\overline{IK}^2 = \frac{x^2}{3}.$$

Portant ces valeurs de $\overline{IL}^2$ et de $\overline{IK}^2$ dans (1), on a :

$$S = \frac{\pi}{3}.\ 2x\ (3R - 2x).$$

La somme des facteurs variables du second membre étant constante, le maximum de S a lieu quand on a :

$$2x = 3R - 2x;$$

alors $x = \frac{3}{4}$ R et $S = \frac{3}{4}\pi R^2$.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Cordeau, école Lavoisier; Lamy, Leblanc, Marcelin, de Cherbourg; Piffaut, de Saint-Étienne; Gélinet, à Orléans; Bruyand, à Troyes; Trokay, à Liége.

QUESTION 75.

Solution par M. Meneau, élève au Lycée de La Rochelle.

Un nombre est composé de trois chiffres. Le carré du chiffre des dizaines est égal au produit des chiffres extrêmes augmenté de 4. La différence entre le double du chiffre des dizaines et celui des unités est égal au chiffre des centaines, et quand on écrit les chiffres de ce nombre dans un ordre inverse, on obtient un second nombre qui retranché du premier, donne pour reste 390 augmenté du chiffre des dizaines commun à ces deux nombres. — Trouver ce nombre.

Soient x, y, z les chiffres des unités, dizaines et centaines.

La première condition donne l'équation

$$y^2 = xy + 4 \qquad (1)$$

et la seconde $\quad 2y - x = z \qquad (2)$

Le nombre cherché a pour valeur

$$x + 10y + 100z$$

donc la troisième condition donne l'équation

(3) $x + 10y + 100z - (100x + 10y + z) = 390 + y$

Substituant dans (1) la valeur de z tirée de (2), il vient :

$$y^2 = 2yx - x^2 + 4$$

ou $$(y - x)^2 = 4,$$

d'où $$y - x = 2,$$

et par suite $$y = 2 + x; \qquad (4)$$

alors $$z = x + 4.$$

Remplaçons y et z par ces valeurs dans (3) il vient après réductions

$$x = 4$$

alors $$y = 6$$

$$z = 8$$

et le nombre cherché est 864.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Biette, collége Stanislas; Bruyand, Montenot, Franquet, de Troyes; Vautré, de Saint-Dié; Foucret, de Châteauroux; Jordan, de Montpellier; Chellier, de Constantine; Noblanc, d'Angers; Merieult, Biard, du Havre; Trokay, de Liége; Dusseaux, de Nancy; Lamy, Leblanc, de Cherbourg; Hugentobler. à Boppelsen (Suisse); Menaud, de Dijon.

QUESTION 76.

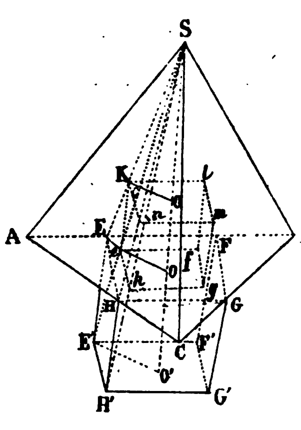
Solution par M. CORDEAU, élève à l'École Lavoisier.

Étant donné un tétraèdre SABC, *on inscrit dans la base* ABC *un carré* EFGH, *sur lequel on construit un cube* EFGHE'F'G'H' *situé du côté de la base* ABC *opposé au quatrième sommet* S *du tétraèdre. On joint ce sommet* S *aux points* E',F',G',H' *par des droites qui coupent* ABC *aux points* e, f. g, h. *La figure* efgh *sera un carré, et le cube construit sur* efgh *sera inscrit au tétraèdre. Si* x *est le côté de ce cube,* a *la base* AC *du triangle* ABC *contenant deux sommets du carré* EFGH, h *la hauteur de* ABC, H *la hauteur du tétraèdre, on aura*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h} + \frac{1}{H} \quad \text{(Concours de Pau, 1868.)}$$

Si l'on pose EF $= b$, on a $b = \dfrac{ah}{a+h}$. Les triangles semblables SE'H', Seh donnent $\dfrac{SH'}{Sh} = \dfrac{E'H'}{eh}$. De même

les triangles SH'G', Shg donnent $\frac{SH'}{Sh} = \frac{H'G'}{hg}$ et à cause du rapport commun et de l'égalité $E'H' = H'G'$ on a $eh = hg$. On démontrerait de même que $ef = fg = hg$. La figure $ehgf$ est un carré puisque les côtés sont égaux et que les angles ehq, hgf sont égaux aux angles E'H'G', H'G'F' qui sont droits. Menons la hauteur SO et prolongeons-la jusqu'en O' les triangles semblables SO'E', Soe donnent $\frac{SE'}{Se} = \frac{SO'}{So} = \frac{E'F'}{eh}$ et si l'on fait $eh = x$, on a



$$\frac{H + b}{H} = \frac{b}{x}$$

d'où
$$x = \frac{ahH}{H(a + h) + ah}.$$

Le cube construit sur $efgh$ est inscrit au tétraèdre. Pour le démontrer joignons E, F, G, H aux sommets k, l, m, n. Ces quatre droites se rencontrent en un même point T puisque les deux carrés EFGH, $klmn$ ont les côtés parallèles.

Les triangles TOE, Tok donnent

$$\frac{TE}{Tk} = \frac{TO}{To} = \frac{EO}{Ko} = \frac{EH}{eh}$$

ou
$$\frac{TO}{To} = \frac{b}{x} = \frac{ah + H(a+h)}{H(a+h)} = \frac{H}{H - x} = \frac{SO}{So}$$

donc $TO = SO$, $To = So$ et le point T se confond avec le point S. On a dès lors

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h} + \frac{1}{H}$$

ou
$$\frac{H(a + h) + ah}{ahH} = \frac{Hh + aH + ah}{ahH}$$
qui est une identité.

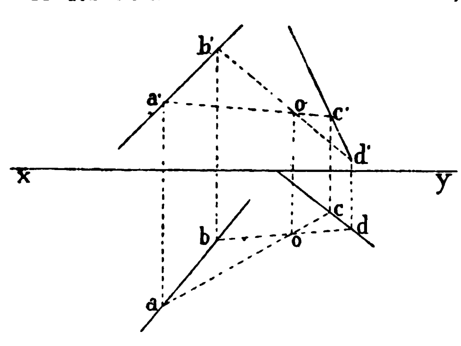
Nota. — **Ont résolu la même question : MM. Pierra, de Saint-Étienne; Cottereau, de Châteauroux; Noblanc, d'Angers; Vautré, de Saint-Dié; Jordan, à Montpellier; Menaud, à Dijon.**

QUESTION 77.

Solution par M. JUNCK, élève du Collége de Longwy.

Étant données deux droites dont les projections ne se coupent pas dans les limites de l'épure, reconnaître si elles se coupent dans l'espace.

Si les deux droites se rencontrent, elles sont dans un même plan; alors les quatre points aa', bb', cc', dd', sont dans un même plan. Par conséquent, les lignes ($a'c'$, ac) et ($b'd'$, bd) doivent se rencontrer, c'est-à-dire que les intersections o, o' de leurs projections de même nom sont sur une perpendiculaire à xy.



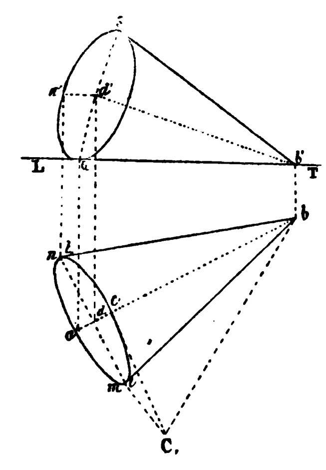
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Bonnamy, Cordeau, Juppont, de l'école Lavoisier; Dilhan, de Castres; Bruyand, Chastang, de Troyes; Cottereau, de Châteauroux; Dalzon, de Saint-Étienne; Gabiand, de Bourg; Courme, Lamy, Leblanc, Marcelin, de Cherbourg; Menaud, à Dijon.

QUESTION 78.

Solution par M. GUBIAND, élève du Lycée de Bourg.

Étant donnée dans le plan horizontal de projection une droite finie ab, *trouver les projections du cône de révolution ayant son sommet en* b, *tangent au plan horizontal le long de* ba, *sachant que la base passe en* a *et connaissant l'angle au sommet.*

Je considère le plan vertical dont la trace est ab; ce plan perpendiculaire à un plan tangent au cône devra passer par l'axe; il coupera la surface latérale suivant deux génératrices AB, CB et la base suivant un diamètre AC. Je



rabats ce plan sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de *ab*; AB ne bouge pas et BC vient en bC_1 de telle sorte que l'angle en *b* soit égal à l'angle au sommet donné. Le milieu D_1 de *a*C est alors le rabattement du centre du cercle de base. En abaissant D_1d perpendiculaire à la charnière, j'ai la projection horizontale *d* du centre de la base et je peux avoir sa projection verticale puisque j'ai la hauteur du point au-dessus du plan horizontal. Le grand axe de l'ellipse de base dans les deux projections devra être perpendiculaire à la projection de l'axe du cône. Au point *d* je mène *ndm* perpendiculaire à *bd* et je porte de chaque côté de *d* des longueurs égales au rayon D_1a de la base : j'ai ainsi le grand axe *nm*. Le petit doit être perpendiculaire au grand, il sera dirigé suivant *ba* et comme *a* doit être un point de l'ellipse j'ai ainsi la longueur *da* du demi petit axe et je peux tracer l'ellipse de base; pour achever le contour apparent je mène les deux tangentes *bt*, bt_1 à l'ellipse. En projection verticale j'ai le grand axe en grandeur et en direction; je cherche un point de l'ellipse, il m'est facile d'obtenir la projection verticale *n'* du point *n* qui est sur l'horizontale *dn*, *d'n'*; je construis l'ellipse de projection verticale, elle doit être tangente en *a'* à la ligne de terre et pour achever le contour apparent je n'ai qu'à mener *b's'* tangente à l'ellipse.

***Nota.* — Ont résolu la même question : MM. Cordeau, école Lavoisier, et Cottereau, à Châteauroux; Jordan, à Montpellier; Guilloux, à Sainte-Barbe; Leblanc, à Cherbourg.**

QUESTION 79.

Solution par M. LAMY, élève du Collége de Cherbourg.

Le produit de quatre nombres entiers consécutifs ne peut pas être un carré.

Soit P ce produit, on a

$$P = (a - 1)\, a\, (a + 1)\, (a + 2)$$

a étant un nombre entier quelconque. En effectuant il vient :

$$P = a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a$$

ou en ajoutant et retranchant l'unité dans le scond membre

$$P = (a^2 + a - 1)^2 - 1.$$

P étant égal à un carré parfait diminué d'une unité, ne peut être lui-même un carré parfait.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Bernaou, d'Épernay ; Cordeau et Simon, école Lavoisier, Paris ; Demortain, de Doullens ; Vautré, de Saint-Dié, Vuillemin, Canuet, Leblanc, à Cherbourg ; Menaud, de Dijon ; Bruyant, à Troyes.

QUESTION 80.

Solution par M. LEBLANC, élève du Collége de Cherbourg.

Dans un triangle en appelant a, b, c *les côtés,* h, h', h'' *les hauteurs,* r', r'', r''', *les rayons des cercles ex-inscrits,* S *la surface,* p *le demi-périmètre, on a la relation*

$$abchh'h''r'r''r''' \cot\frac{A}{2} \cot\frac{B}{2} \cot\frac{C}{2} = 8p^3S^3.$$

Comme $ah = bh' = ch'' = 2S$, la question revient à démontrer que $r'r''r''' \cot\frac{A}{2} \cot\frac{B}{2} \cot\frac{C}{2} = p^3$.

or $\quad r' = p \operatorname{tg}\frac{A}{2},\ r'' = p \operatorname{tg}\frac{A}{2},\ r''' = p \operatorname{tg}\frac{C}{2},$

donc $\quad r'r''r''' = p^3 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}$

multipliant les deux membres par

$$\cot\frac{A}{2} \cot\frac{B}{2} \cot\frac{C}{2}$$

il vient $$r'r''r''' \cot g \frac{A}{2} \cot g \frac{B}{2} \cot g \frac{C}{2} = p^3$$

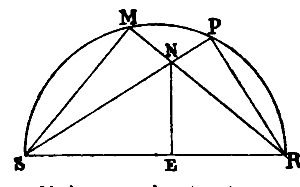
c. q. f. d.

Nota.—Ont résolu la même question : MM. Thual, de Lorient ; Vautré, de Saint-Dié ; Cordeau et Simon, école Lavoisier ; Hugentobler, de Boppelsen (Suisse) ; Montenot, Franquet, de Troyes ; Bernaou, d'Épernay ; Courme, Lamy, Morcelin, de Cherbourg ; Trokay, de Liége ; Westphalen et Merleult, du Havre ; Demortain, de Doullens ; Gélinet à Orléans ; Bouis, à Châteauroux ; Menaud, à Dijon ; Merle des Isles, à Moulins.

QUESTION 81.

Solution par M. PERRIN, élève du Lycée de Clermont-Ferrand.

Si SMPR *est un demi-cercle dont le diamètre est* SR *et si les cordes* SP, RM *se coupent en un point* N, *on a la relation* $\overline{SR}^2 = SN \times SP + RN \times RM$. (The Educational Times.)



Abaissons du point N la perpendiculaire NE sur le diamètre SR. Les quadrilatères NPRE, SMNE étant inscriptibles, on a :

$$SN \times SP = SE \times SR$$
$$RN \times RM = RE \times SR$$

d'où en ajoutant

$$SN \times SP + RN \times RM = SR\,(SE + ER) = \overline{SR}^2.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. d'Arodes, Dubosq, de Mont-de-Marsan ; Cordeau et Simon, école Lavoisier ; Lacroix, école des Mineurs, Saint-Étienne ; Traverse, de Nantes ; Menaud, de Dijon ; Lamy, Baucher, Marcelin, de Cherbourg ; Dépallières, de Belley ; Trokay, de Liége ; Dermanghem, de Pont-à-Mousson ; Rey, lycée Saint-Louis ; Hugentobler, de Boppelsen (Suisse) ; Bouffez, d'Amiens.

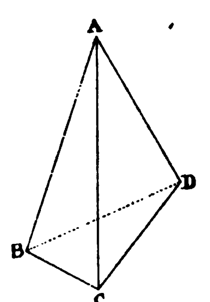
QUESTION 82.

Solution par M. A. LACROIX, élève du Cours des mineurs de Saint-Etienne.

Dans le tétraèdre ABCD, *la face* ABC *est à angle droit sur les faces* ABD *et* ACD. *Si l'arête* BC *est aussi à angle droit sur l'arête* DC, *la face* ADC *est à angle droit sur la face* BDC.

(The Educational Times.)

La face ABC étant perpendiculaire aux deux faces ABD, ACD, l'est à leur intersection AD et réciproquement AD est perpendiculaire à la face ABC. La droite CD qui part d'un point de AD est par hypothèse perpendiculaire à BC dans la face ABC; donc d'après le théorème des trois perpendiculaires AC est perpendioulaire à BC; par suite BC étant perpendiculaire à AC et à AD, est perpendiculaire à la face ACD, et BCD qui passe par BC sera par la même perpendiculaire à la face ACD.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. Lamy, de Cherbourg; Perrin, de Clermont; Vautré, de Saint-Dié; Jordan, de Montpellier; Bouffez, à Amiens; Trokay, à Liége.

QUESTION 83.

Solution par MM. Chellier et Tivol, élèves du Lycée de Constantine.

1° *La somme de deux nombres consécutifs de la forme* $\frac{n(n+1)}{2}$, n *étant entier, est toujours un carré parfait.*

2° *Le double d'un nombre de la forme* $2n(n-1)$, *augmenté de* 1, *donne le carré d'un nombre impair.*

3° *La somme de deux nombres consécutifs de la forme* $2n(n-1)$ *donne le carré d'un nombre pair.*

4° *Le produit de deux nombres de la forme* $\frac{n(n+1)}{2}$ et $2n(n-1)$ *augmenté du carré de* n, *donne la quatrième puissance de* n.

1° Les deux nombres consécutifs étant $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$, leur somme est $\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}$ ou n^2.

2° Le double d'un nombre de la forme $2n(n-1)$ est $4n(n-1)$ ou $4n^2-4n$, si l'on ajoute 1, on a $4n^2-4n+1$ ou $(2n-1)^2$ qui est le carré d'un nombre impair.

3° La somme à considérer est

$$2n(n-1)+2n(n+1)=2n^2-2n+2n^2+2n=(2n)^2.$$

4° Le produit à considérer est

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2n(n-1)=n^2(n^2-1)=n^4-n^2$$

en y ajoutant n^2 on obtiendra n^4 qui est une quatrième puissance.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Simon, Cordeau, école Lavoisier; Prisset, Souchet, d'Angers; Vautré, de Saint-Dié; Montenot, Franquet, Bruyand, de Troyes; Cuvelier, Carez, de Dinant (Belgique); Menaud, de Dijon; Perrin, de Clermont; Vuillemin, Lamy, Marcelin, Leblanc, à Cherbourg; Hugentobler, à Boppelsen (Suisse).

QUESTION 85.

Solution par M. Westphalen, élève du Lycée du Havre.

Tout nombre de la forme

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}[1+2n(n-1)]$$

est une quatrième puissance. (Brocot.)

En effet, développant cette expression, on trouve

$$\frac{n^2-n+n^2+n+2n^4-2n^3+2n^3-2n^2}{2} \text{ ou } n^4$$

c. q. f. d.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Bonnamy, Simon, Cordeau, école Lavoisier; Cuvellier et Carez, de Dinant (Belgique); Chellier, Tivol, de Constantine; Montenot, Franquet, Bruyand, de Troyes; Vautré, de Saint-Dié; Leblanc, Vuillemin, de Cherbourg.

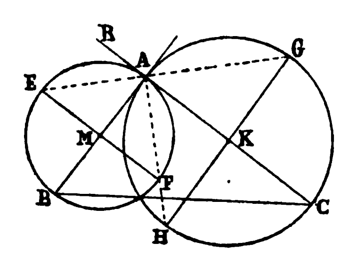
QUESTION 86.

Solution par M. Lamy, élève du Collége de Cherbourg.

Étant donné un triangle ABC, *sur* AB *et sur* AC *comme diamètres, on décrit des circonférences ; on mène dans la première un diamètre* EF *parallèle à* AC, *et, dans la seconde, un diamètre* GH *parallèle à* AB. *Démontrer que les points* F, H *sont sur la*

bissectrice de l'angle A *du triangle, et que les points* E, G *sont sur la bissectrice extérieure de cet angle.* (Brocot).

Joignons AF. Le triangle AMF est isoscèle, donc MAF = MFA or MFA = FA*c* comme alternes-internes, donc MAF = FA*c* et AF est bissectrice de l'angle BAC.



De même, si l'on joint AH, le triangle AHK est isoscèle et HAK = AHK. Or AHK = BAK comme alternes-internes, donc HAK = BAH, et AH est bissectrice de l'angle BAC; elle coïncide donc avec AF.

Joignons EA. Le triangle isoscèle EAM donne EAM = AEM, or AEM = RAE comme alternes-internes, donc EAM = RAE et AE est bissectrice de l'angle extérieur RAB.

De même, en joignant AG, on démontre que RAG = GAP et que AG est bissectrice de l'angle PAK opposé par le sommet à l'angle BAR. Donc AG coïncide avec le prolongement de la droite AE bissectrice de BAR; par conséquent, le point G se trouve sur cette bissectrice.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Perrin, de Clermont-Ferrand; Cordeau, école Lavoisier; Cuvellier, de Dinant (Belgique); Dalzon, de Saint-Étienne; Montenot, Franquet, de Troyes; Belin, de Semur; de Mézières, de Nantes; Boucher, de Cherbourg; Trokay, de Liége; Rimmel, Dermenghem, Martin, de Pont-à-Mousson; Menaud, de Dijon; Bouffez, à Amiens.

Avis. — Nous n'avons reçu jusqu'à présent aucune solution exacte des deux questions 53 et 96, sur lesquelles nous rappelons l'attention de nos lecteurs. (*Voir 1re année.*)

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 5446-8.

ÉTUDE SUR LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE

par F. R. A.

(*Suite*, voir page 99).

VII. Propriétés des Proportions algébriques et des suites de Rapports égaux.

1° *En renversant des rapports algébriques égaux, on obtient d'autres rapports algébriques égaux.*

Car les raisons primitives étant égales, les raisons nouvelles le sont aussi, comme inverses des premières (propr. 7e des rapports).

2° *Dans toute proportion algébrique, le rapport algébrique des antécédents est égal au rapport algébrique des conséquents.*

Soit la proportion algébrique $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, et soit r la raison.

On a $a = b^r$, et $c = d^r$; donc, identiquement

$$\frac{a}{c} = \frac{b^r}{d^r} = \frac{b}{d} \text{ (propr. 5e des rapports).}$$

3° *Dans toute proportion algébrique, on peut changer les moyens de place entre eux, ou les extrêmes entre eux, ou bien les moyens en extrêmes et les extrêmes en moyens.*

Cela donne huit aspects différents que peut présenter une proportion algébrique. En effet :

la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ donne (propr. 2e) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

ou * $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$ qui donne $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

ou $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ qui donne $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

ou $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ qui donne $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

* On transcrit la dernière égalité en commençant par le second membre

4° *Dans toute proportion algébrique, le produit des antécédents est à celui des conséquents, comme le quotient des antécédents est à celui des conséquents.*

Soit la proportion algébrique $a (:) b = c (:) d$, et soit r la raison ; on a $a = b^r$, et $c = d^r$.

Multipliées ou divisées membre à membre, ces égalités donnent $ac = b^r d^r = (bd)^r$ d'où $\frac{ac}{bd} = r$

$$a : c = b^r : d^r = (b : d)^r \text{ d'où } \frac{a : c}{b : d} = r$$

On a donc $$\frac{ac}{bd} = \frac{a : c}{b : d}$$

5° *Dans une suite de rapports algébriques égaux, on peut élever à une même puissance :*

Ou tous les termes, ou seulement les deux termes de l'un des rapports,

Ou tous les antécédents, ou tous les conséquents.

En effet, si l'opération se fait sur tous les termes, ou sur les deux termes d'un rapport, la raison n'est pas changée (propriété 5ᵉ des rapports) ; si l'on agit sur tous les antécédents ou sur tous les conséquents, toutes les raisons sont multipliées ou divisées par un même nombre (prop. 3ᵉ et 4ᵉ des rapports).

Remarque. — L'extraction d'une même racine est comprise dans l'énoncé.

6° *Dans une suite de rapports algébriques égaux, on peut multiplier ou diviser tous les antécédents par leurs conséquents respectifs, ou tous les conséquents par leurs antécédents.* *

La première partie de ce théorème résulte de la propriété 2ᵉ des rapports : toutes les raisons sont augmentées ou diminuées de 1...

Pour démontrer la deuxième partie, on renverse les rapports donnés, on applique la première partie du théorème, et on renverse de nouveau.

---

* *Cela veut dire* : ... tous les antécédents par des nombres égaux à leurs conséquents respectifs, ou tous les conséquents par des nombres égaux à leurs antécédents.

Par exemple, de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

on tire d'abord $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$

puis (1e partie du théorème) $\frac{ab}{a} = \frac{cd}{c} = \frac{ef}{e}$

et enfin $\frac{a}{ab} = \frac{c}{cd} = \frac{e}{ef}$

7° *Étant donnés des rapports algébriques égaux, on obtient un nouveau rapport algébrique égal aux premiers, en posant le produit des antécédents sur le produit des conséquents.*

Soit la suite $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, et soit r la raison.

Puisque r exprime combien de fois chaque conséquent est facteur dans son antécédent, on a

$$a = b^r \quad c = d^r \quad e = f^r$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$ace = b^r d^r f^r = (bdf)^r$$

Le nombre r exprime donc combien de fois bdf est facteur dans ace, et l'on a

$\frac{ace}{bdf} = r$, comme dans les rapports donnés.

Remarque. — *Étant donnés plusieurs rapports algébriques inégaux, si l'on pose, en rapport algébrique, le produit des antécédents sur le produit des conséquents, on obtient un nouveau rapport compris entre les valeurs extrêmes des rapports primitifs.*

Soient par ordre croissant, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f} < \frac{g}{h}$

Appelons r la valeur du premier rapport et t la valeur du dernier.

On a $\quad a = b^r \quad c > d^r \quad e > f^r \quad g > h^r$

Donc $\quad aceg > (bdfh)$ et $\frac{aceg}{bdfh} > r$.

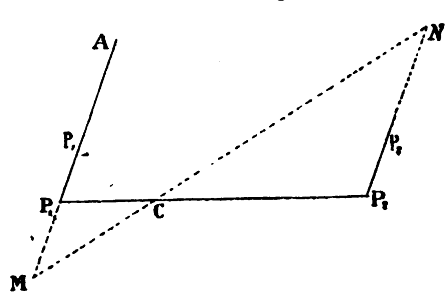
On a de même $g = h^t \quad e < f^t \quad c < d^t \quad a < b^t$.

Donc $\quad aceg < (bdfh)^t$ et $\frac{aceg}{bdfh} < t$.

(*A suivre.*)

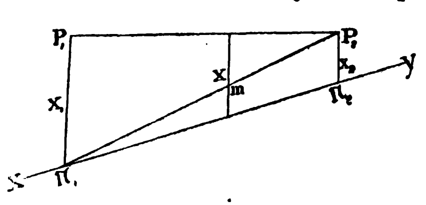
THÉORIE DU BARYCENTRE

1. Soient P_1, P_2 deux points donnés; p_1, p_2 deux grandeurs de même nature, dont le rapport est un nombre abstrait positif ou négatif (on peut prendre pour ces grandeurs p_1 et p_2 deux droites parallèles, et de même sens ou de sens contraire, suivant que le rapport est positif ou négatif). On sait qu'il existe un point C et un seul sur la ligne $P_1 P_2$ tel que l'on ait $\frac{P_1C}{CP_2} = \frac{p_2}{p_1}$. Pour obtenir ce point, on opère de la manière suivante : sur la droite P_2B, qui représente p_2, on prend une longueur P_2N égale à P_1A ou p_1, et *de même sens;* puis on prend sur la direction de la ligne AP_1 une longueur P_1M égale à P_2B, et de *sens contraire.* En joignant le point N au point M, on obtiendra une droite qui rencontrera la droite P_1P_2 au point C cherché.



Le point C s'appelle le *centre des distances proportionnelles* des deux points P_1, P_2, ces points ayant les coefficients p_1, p_2. Möbius l'a appelé le *Barycentre.*

2. Cette définition est justifiée par la propriété suivante : *Soit* XY *une droite qui ne rencontre pas* P_1P_2, *et* x_1, x, x_2 *les longueurs de trois parallèles partant des points* P_1, C, P_2, *et terminées à la droite* XY;



on a $$(p_1 + p_2)x = p_1x_1 + p_2x_2$$

En effet, si je mène la droite $\pi_1 P_2$, rencontrant en m la droite $C\gamma$, on a

$$\frac{m\gamma}{x_2} = \frac{\pi_1\gamma}{\pi_1\pi_2} = \frac{p_2}{p_1 + p_2};$$

$$\frac{Cm}{x_1} = \frac{CP_2}{P_1P_2} = \frac{p_1}{p_1 + p_2}.$$

On en tire facilement $(Cm + m\gamma)(p_2 + p_1) = p_1x_1 + p_2x_2$, en remarquant seulement que la ligne $m\gamma$ est susceptible de prendre le signe $+$ ou le signe $-$, selon qu'elle est comptée au-dessus ou au-dessous de XY; dans tous les cas, la somme algébrique $Cm + m\gamma$ sera égale à x.

Lorsque la droite se déplace parallèlement à elle-même, les trois quantités x, x_1, x_2 varient d'une même quantité λ, et par suite on aura

$$(p_1 + p_2)(x + \lambda) = p_1(x_1 + \lambda) + p_2(x_2 + \lambda).$$

La propriété énoncée subsistera donc toujours, et elle sera vraie encore lorsque la droite XY rencontrera P_1P_2. Mais alors nous devrons compter les quantités x_1, x, x_2 positivement lorsqu'elles seront tracées dans un sens, et négativement en sens contraire.

3. En considérant de même un troisième point P_3, avec une grandeur correspondante p_3, on obtient en opérant sur les points C et P_3, le point C étant affecté du coefficient $p_1 + p_2$, un nouveau point Q tel que l'on ait $\frac{CQ}{QP_3} = \frac{p_3}{p_1 + p_2}$; ce point donnera en appelant x' sa distance à XY comptée parallèlement à la direction prise précédemment.

$$(\overline{p_1 + p_2} + p_3)\, x' = (p_1 + p_2)\, x + p_3x_3;$$

et, en vertu du théorème précédent on aura

$$(p_1 + p_2 + p_3)\, x' = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3.$$

Ce point Q est le *barycentre des trois points;* on lui fait correspondre le coefficient $(p_1 + p_2 + p_3)$; et ainsi de suite.

4. Si donc x_1, x_2, x_3. . . . x_n représentent les distances parallèles à une direction donnée de n points P_1, P_2, P_3, ... P_n à une droite quelconque XY, et si x désigne la distance à la même droite du centre des distances proportionnelles des n points, obtenu en composant l'un de

ces points avec le centre des distances proportionnelles des $n - 1$ autres points, on a la formule

$$x\Sigma p_1 = \Sigma x_1 p_1.$$

La symétrie de cette formule prouve que *la position du barycentre est indépendante de l'ordre dans lequel on prend les* n *points.*

5. Nous énoncerons seulement les propositions suivantes, très-faciles à vérifier.

La position du barycentre ne varie pas si l'on multiplie tous les coefficients par un même nombre.

On peut remplacer plusieurs points par leur centre particulier, pourvu qu'on donne à ce centre un coefficient égal à la somme des coefficients des points considérés.

Inversement, *on peut remplacer un point par plusieurs autres dont il est le centre, en choisissant convenablement les coefficients de ces points.*

Il est facile de voir que le barycentre des points donnés se confondrait avec le *centre des forces parallèles* appliquées aux mêmes points donnés et proportionnelles aux coefficients $p_1, p_2 \ldots$

6. Lorsque tous les coefficients deviennent égaux, la formule fondamentale se réduit à

$$nx = x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_n.$$

Le point ainsi déterminé s'appelle alors le *centre des moyennes distances*. C'est le point avec lequel se confondrait le centre de gravité du système de n molécules égales appliquées aux points donnés.

On peut considérer le barycentre comme le centre des moyennes distances en supposant p_1 points confondus en P_1, p_2 points en P_2, etc. Mais pour le considérer de cette manière, il faut supposer tous les coefficients commensurables.

7. Reprenons maintenant la formule générale. Si $\Sigma p_1 x_1 = 0$, alors on a $x = 0$, et par suite : *Si la somme des distances de* n *points fixes à une droite, multipliées respectivement par des facteurs constants, est nulle, la droite passe par un point fixe qui est le barycentre des* n *points pour les coefficients correspon-*

dants. Si cette somme est constante, la droite enveloppe un cercle ayant pour centre le barycentre.

Si au contraire c'est le dénominateur qui est nul, *le barycentre s'éloigne à l'infini.* Si, dans la détermination du centre, deux coefficients consécutifs étaient égaux et de signes contraires, le centre particulier s'éloignerait à l'infini; alors on change l'ordre des points.

On a une application de ce cas particulier en mécanique, lorsque l'on a des forces parallèles de sens contraires appliquées à un corps. Si la somme algébrique de ces forces est nulle, le système se réduit à un couple, et le centre des forces parallèles est rejeté à l'infini.

(A suivre). A. M.

NOTE D'ALGÈBRE.

REMARQUES SUR LA FRACTION $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

En cherchant les valeurs d'x qui correspondent à une valeur d'y, on trouve sous le radical le trinôme:

$$(b - b'y)^2 - 4(a - a'y)(c - c'y).$$

1° *Ses racines sont réelles, lorsque le coefficient* $b'^2 - 4a'c'$ *du terme en* y^2 *est négatif.* En effet, substituons $\frac{a}{a'}$ et $\frac{c}{c'}$, le trinôme prend les valeurs positives:

$$\left(b - b'\frac{a}{a'}\right)^2 \text{ et } \left(b - b'\frac{c}{c'}\right)^2.$$

Ayant un signe contraire à celui de son premier terme pour $y = \frac{a}{a'}$ et $y = \frac{c}{c'}$, le trinôme a des racines réelles, qui comprennent les deux nombres $\frac{a}{a'}$, $\frac{c}{c'}$.

2° Pour que les racines deviennent égales, il *faut d'abord* que l'une soit $\frac{a}{a'}$ et l'autre $\frac{c}{c'}$. Ce qui donne les deux condi-

tions : $b - b'\frac{a}{a'} = 0 \ , \ b - b'\frac{c}{c'} = 0.$

Si b' est $\gtrless 0$, ces conditions *sont suffisantes*, car il en résulte $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$. Donc les racines sont toutes deux égales à $\frac{a}{a'}$.

On peut d'ailleurs vérifier que le trinôme en y prend la forme : $(b'^2 - 4a'c')(K - y)^2$, en posant

$$K = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

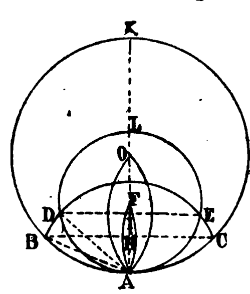
En supposant $b' = 0$, les conditions sont : $b = 0, \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Un cercle étant tracé, trouver, au moyen du compas seul, son centre.

La construction indiquée par la figure ci-jointe est la suivante :

D'un point A quelconque, pris sur la circonférence, avec un rayon quelconque, je décris un arc de cercle qui coupe la circonférence aux points B et C; de B et C comme centres, avec le même rayon, je décris deux arcs de cercle qui se coupent aux points A et F. Le cercle ayant F pour centre et passant au point A coupe en D et E l'arc BC; si du point D comme centre, avec DA pour rayon je décris un arc de cercle, et de même du point E, avec EA pour rayon un autre arc de cercle, ces deux arcs de cercle se coupent en un second point O, qui n'est autre que le centre cherché.



En effet, si nous menons la droite BC, et le diamètre perpendiculaire, nous avons, dans le cercle ABK,

$$BA^2 = AH \times AK = AF \times R = AL \times \frac{R}{2}.$$

Puis, la corde DE donne, dans le cercle ADL

$$DA^2 = AL \times AI = AL \times \frac{AO}{2}.$$

Comme d'autre part on a DA = BA, on en tire

$$AO = R,$$

et par suite on voit que le point O est bien le centre du cercle cherché, et il est bien déterminé au moyen du compas seulement; car les droites ponctuées ne servent qu'à la démonstration.

Nota. — Cette curieuse solution, dont l'auteur nous est inconnu, nous a été communiquée par M. de Longchamps, professeur au lycée de Poitiers.

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le **docteur Henri Suter**, de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon.

Suite. Voir page 82.

LA SCIENCE CHEZ LES GRECS.

Son importation. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie.

On cherchait à étendre ces propositions, des figures planes formées de lignes droites, au cercle et aux solides. Mais on se heurtait à des difficultés si considérables que, comme on l'a dit, quelques hommes éminents seulement osèrent s'occuper de ces problèmes; par suite leur solution exigera beaucoup de temps.

Proclus, dans son commentaire d'Euclide, cite le mathématicien Hippias d'Elis, contemporain de Socrate, comme l'inventeur d'une courbe permettant d'obtenir la division d'un angle en trois parties égales et même en un nombre plus grand de parties. Cette courbe est ce qu'on appelle la *quadratrice*; c'est une courbe transcendante. Elle a été employée plus tard par Dénostrate et par d'autres; c'est

pourquoi elle est aussi appelée la quadratrice de Dénostrate. Pappus, dans ses *Coll. Math. lib. IV*, nous en a conservé la construction que nous reproduisons ici brièvement :

Soit un carré ABCD; de l'un des angles A avec AD comme rayon, on décrit un quadrant DEB; pendant que le rayon AE se déplace avec une vitesse uniforme de la position AB à la position AD, la droite BC se meut parallèlement à elle-même, et également avec une vitesse constante vers AD. Le lieu de l'intersection de cette droite avec le rayon forme une courbe appelée *quadratrice.*

Il est facile de voir que, cette courbe une fois construite, en divisant la droite AB, on obtiendra immédiatement chaque division correspondante du quadrant BED; mais la courbe ne peut naturellement être produite que par la construction d'un certain nombre de points et leur réunion par un trait continu.

On ne peut méconnaître que cette solution d'Hippias ne soit la plus simple et la plus approchée; et que, grâce précisément à ces propriétés, elle ne mérite d'être placée au-dessus même des solutions les plus ingénieuses que l'antiquité nous ait données de ces problèmes. Nous ne connaissons que cette découverte d'Hippias.

Hippocrate de Chios, qu'il ne faut pas confondre avec le célèbre médecin qui porte le même nom, et qui était originaire de Cos, était sans contredit le plus grand des géomètres qui ait paru entre Pythagore et Platon. Le problème de la duplication du cube, ainsi que celui de la quadrature du cercle lui doivent d'importantes simplifications et d'importants progrès. Il fut d'abord commerçant; puis, pendant un séjour à Athènes, il s'adonna complétement aux études mathématiques. Quant à ses recherches sur la duplication du cube, nous ne savons rien de plus que ce que nous dit Proclus dans son commentaire d'Euclide, c'est-à-dire qu'il ramena ce problème à celui-ci : Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux droites données. Hippocrate est peut-être parti de la considération de la proportion continue

$$a : x = x : y = y : b,$$

dans laquelle, en effet, si l'on pose $b = 2a$, x est le côté du cube double du cube de a; car, en résolvant cette proportion en deux, et en multipliant ces dernières, on trouve :

$$x^3 = a^3 b = 2a^3 \text{ (1)}$$

Nous verrons comment ce problème s'est transformé plus tard, entre les mains de l'école platonicienne, grâce à cette réduction. On ne nous dit pas si Hippocrate s'en est occupé davantage.

Son principal objectif fut la quadrature du cercle. Il ne faudrait pas regarder les essais de l'antiquité, relativement à ce problème, avec le même dédain que nous témoignons, à bon droit, aux tentatives analogues du moyen âge et surtout de l'époque moderne. Car, avant la découverte de l'irrationalité du rapport de la circonférence au diamètre, la quadrature du cercle était un problème qui s'offrait logiquement dans le développement systématique des mathématiques. Lorsque cette irrationalité eut été établie, les mathématiciens grecs se préoccupèrent de trouver une construction au moins théoriquement exacte, par laquelle on pût représenter aussi exactement que possible l'aire ou circonférence du cercle. Ils savaient bien qu'une identité complète était impossible à cet égard; et peu de Grecs eurent l'idée de chercher un rapport rationnel entre la circonférence et le diamètre.

Tout ce que nous savons des efforts d'Hippocrate dans ce sens nous est appris par le commentaire déjà cité de la *Physica Auscultatio* d'Aristote, dû à Simplicius. Ce commentaire nous a conservé un extrait assez long de l'histoire des mathématiques d'Eudémos. Nous y voyons qu'Hippocrate

---

(1)

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

multipliant membre à membre, on en conclut

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{x}{b}$$

d'où $x^3 = a^2 b$

et si $b = 2a$, on a $x^3 = 2a^3$ c. q. f. d.

M.

aurait été conduit à la recherche de la quadrature du cercle par la quadrature du croissant qui surmonte le côté du carré, c'est-à-dire de la célèbre *lunule d'Hippocrate* (1).

Simplicius suit l'indication d'Alexandre Aphrodisie, selon laquelle Hippocrate croyait avoir trouvé la quadrature du cercle au moyen de la lunule surmontant l'hexagone inscrit; mais en commettant cette faute de supposer que cette lunule surmontant le côté de l'hexagone était *carrable*, ce qu'il n'avait cependant démontré que pour la lunule surmontant le côté du carré. Car si la lunule au-dessus du côté de l'hexagone régulier était carrable, la surface du cercle se ramènerait à celle d'une figure formée de lignes droites. D'autre part Eudemos, dans son histoire de la géométrie, nous rapporte, ainsi que Simplicius l'indique, qu'Hippocrate ne s'est pas borné à la lunule au-dessus du côté du carré, mais qu'il a introduit aussi dans son étude les lunules dont l'arc extérieur est plus grand ou plus petit qu'un demi-cercle : Hippocrate semble donc être justifié de toute accusation de conclusion erronée, car nous voyons par là qu'il a fait dépendre la quadrature du cercle, de la quadrature encore à trouver de la lunule au-dessus du côté de l'hexagone. Les deux constructions de lunules citées par Simplicius, lunules dont l'arc extérieur est plus grand ou plus petit que le demi-cercle, nous donnent une idée trop avantageuse du savoir géométrique d'Hippocrate pour que nous puissions le supposer capable d'une aussi grossière erreur.

Ces problèmes traités avec une véritable pénétration pour cette époque, nous donnent une image assez nette de l'état et des méthodes de la géométrie à cette période. De l'examen de ces travaux il résulte qu'Hippocrate doit avoir connu les principales propositions relatives au cercle comme celle-ci, par exemple : les surfaces des cercles sont entre elles comme les carrés de leur diamètre ; les segments plus grands que le demi-cercle sont capables d'angles aigus ; les segments plus petits que le demi-cercle contiennent des angles obtus ; les

(1) On appelait lunule (μηνίσχος) la figure en forme de faucille formée par deux arcs de cercle qui se coupent.

segments semblables contiennent des angles égaux, et sont entre eux comme les carrés de leur corde. Ces propositions sont mentionnées par Eudemos comme étant de l'invention d'Hippocrate. Bretschneider ne lui accorderait que deux propositions relatives au rapport de la surface du cercle et du segment diamètre et à la corde; mais lui refuserait la suivante : les segments semblables embrassent des angles égaux; ainsi que la connaissance de la relation entre les angles inscrits et les angles au centre. Cet auteur tire ces conclusions, surtout celle qui est relative à la deuxième proposition, de ce qu'elle n'est point employée dans toute l'exposition d'Hippocrate et là surtout où elle aurait singulièrement contribué à simplifier la démonstration. Mais ce motif ne paraît point suffisant, car la preuve de cette proposition n'exige par elle-même que les connaissances les plus primitives de la géométrie plane sur le triangle équilatéral et sur l'angle extérieur d'un triangle; de telle sorte que la découverte du géomètre grec ne peut être postérieure aux théorèmes de similitude qu'Hippocrate, comme nous le voyons, avait déjà étendus au cercle et à ses segments. Si cette proposition n'est pas employée dans les démonstrations correspondantes du mathématicien grec, cela pouvait tenir à l'énorme prolixité qu'il a mise dans sa démonstration, prolixité qui permet rarement d'invoquer les propositions auxiliaires de même ordre, mais qui l'oblige constamment à recourir aux théorèmes les plus élémentaires. Ce fait s'explique par deux circonstances : d'abord par la tendance des mathématiciens grecs à une précision et à une clarté complète dans leurs déductions; et, en second lieu, par l'absence de traités élémentaires méthodiques, à cette époque. Les inventions se succédaient isolées, sans liens entre elles, sans coordinations, et n'étaient pas recueillies par l'écriture. Aussi les théorèmes étaient-ils bien nettement établis dans la tête du mathématicien exercé; mais ils n'étaient pas aussi familiers aux adeptes moins initiés; et pour rendre les démonstrations plus sensibles et plus compréhensibles à ces derniers, il était nécessaire de recourir à des propositions élémentaires et bien connues : de là résultait nécessairement une grande prolixité. *(A suivre.)*

CONCOURS ACADÉMIQUES DIVERS

DOUAI 1877.

Enseignement spécial.

1. — On donne dans l'espace cinq points A, B, C, D, E, et on demande de construire les projections du parallélipipède dont AE serait une diagonale et dans lequel les trois arêtes issues du sommet A passeraient respectivement par les points B, C, D.

On aura soin d'indiquer les parties invisibles, en donnant la manière de les reconnaître.

2. — On pose une barre AB, droite et homogène, d'un poids donné P, de manière qu'elle appuie son extrémité supérieure B contre un mur vertical BC, et son extrémité inférieure A sur un sol horizontal. Elle est d'ailleurs dans un plan vertical perpendiculaire au mur. On demande : 1° quel est l'angle α le plus grand qu'elle puisse faire avec le mur, sans tomber, connaissant ses deux coefficients de frottement f et f' par rapport au sol et par rapport au mur, c'est-à-dire les quotients respectifs des résistances F et F' que le sol et le mur opposent au glissement de la barre par ses réactions normales correspondantes N et N' du sol et du mur; 2° les valeurs de ces réactions normales au moment où l'angle α atteint sa valeur maxima; 3° dans l'hypothèse de $f = f'$, on demande quelle relation il y a entre l'angle limite α et l'angle commun de frottement.

DOUAI 1875.

1. — Quels sont les triangles rectangles pour lesquels le rapport de l'hypoténuse a au périmètre $2p$ est minimum? Entre quelles limites varie ce rapport dans les triangles rectangles?

2. — D'un point fixe O partent deux droites égales OB, OB' dont la grandeur c est constante, mais dont la direction est variable. Les points B et B' sont les deux sommets d'un losange ABH'B' ayant ses côtés c' également invariables en longueur et variables en direction.

On demande : 1° de démontrer que le produit des distances OA et OA est constant et d'exprimer ce produit en fonction de c et c'.

2° De démontrer que si le point A décrit une certaine droite AD, située à une distance donnée h du point o, l'autre point A' décrira une circonférence et de déterminer cette circonférence en grandeur et en direction au moyen des données c, c' et h.

3° Déduire de là une manière de transformer exactement, l'un dans l'autre dans les applications de la mécanique, deux modes de mouvements fréquemment employés.

AIX 1873.

On donne un cercle et une tangente fixe AB. On mène un couple de tangentes interceptant sur la première tangente un segment AB égal au

diamètre du cercle; on abaisse la perpendiculaire MD sur le prolongement du rayon OC.

1° Démontrer la relation $\overline{MD}^2 = DE \cdot EC$

2° Trouver le lieu du point M.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES 1865.

(*Départements*).

Étant donné un triangle isoscèle, on demande le lieu des points du plan tels que la perpendiculaire abaissée de chacun d'eux sur la base du triangle soit moyenne géométrique entre les perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres côtés.

NANCY ET BESANÇON 1873.

1. — On décrit une circonférence sur laquelle on prend un arc AB égal au tiers de cette circonférence. Il s'agit de trouver sur l'arc ACDB restant deux points C et D tels qu'en joignant CA, CB, CD on ait

$$CB = CA + CD.$$

2. — *a* et *c* étant deux points d'une circonférence, trouver sur cette circonférence deux autres points *d* et *b* tels que la ligne *cb* soit égale à la somme ou à la différence des droites *ac* et *cd*.

3. — Surface d'un triangle en fonction des médianes.

BORDEAUX

1re Question.

Étant donné un triangle isoscèle CDD', on prolonge les côtés CD, CD' au delà de la base de DE = D'E'. Des points D, D' comme centres, on décrit les arcs de cercle AE, E'A'; de C comme centre, on décrit l'arc EBE' tangent aux deux premiers. On répète ensuite la même construction au-dessous de la droite ADD'A'. La figure ainsi obtenue porte le nom d'*anse de panier*. Désignons par $2a$, $2b$ les longueurs AA', BB', des deux arcs de la figure.

Maintenant si l'on donne la longueur des deux axes $2a$, $2b$ et que l'on propose de décrire l'anse de panier, on pourra choisir à volonté une des trois longueurs CD, DD', DE, et déterminer les deux autres, ou encore, ce qui revient au même, au lieu de donner l'une des trois longueurs, établir entre elles une condition arbitraire.

Cela posé : 1° on demande de déterminer les côtés du triangle CDD de manière que les courbures des divers arcs de cercle dont se compose l'anse de panier soient aussi peu différentes que possible, c'est-à-dire de manière que le rapport des rayons des cercles $\frac{CE}{DE}$ diffère aussi peu que possible de l'unité, ou que $\frac{CE}{DE} - 1$ soit un minimum.

2° Dans quel cas le triangle satisfaisant à cette condition sera-t-il équilatéral ?

3° En supposant $a = 4$, $b = 3$, calculer numériquement les dimensions du triangle CDD′ pour $\frac{CE}{DE} - 1$ minimum, et de plus le périmètre et l'aire de la figure.

Comparer cette dernière à celle de l'ellipse qui a les mêmes demi-axes.

Nota. — Cette question a été donnée au concours de Douai en 1874.

2e Question.

On donne les projections horizontales de trois points A, B, C, avec leurs hauteurs au-dessus du plan horizontal. D'un quatrième point D situé dans le plan ABC on mesure les distances DA, DB, DC, en se servant d'une règle dont on ne connaît pas le rapport avec le mètre, de sorte que cette mesure ne donne que les rapports des trois dimensions. Déterminer d'après cela par une construction géométrique la projection horizontale du point D et sa hauteur au-dessus du plan horizontal.

On supposera pour plus de simplicité l'un des côtés du triangle ABC parallèle au plan horizontal.

BORDEAUX 1873.

1re Question.

Une tour DE est bâtie au pied d'un coteau. Sur le penchant du coteau on mesure une base AB dont le prolongement vient passer au pied de la tour; les hauteurs angulaires du sommet de la tour au-dessus de l'horizon, mesurées des points A et B sont α et β; la dépression HCD du pied de la tour au-dessous de l'horizon, mesurée d'un point quelconque C de la base est γ. Calculer la hauteur DE de la tour.

Application aux données. $AB = 10^m$

$\alpha = 37° \ 12' \ 41'', 5$

$\beta = 60° \ 8' \ 14''$

$\gamma = 72° \ 56' \ 18'', 5.$

2e Question.

Dans un cube on inscrit une sphère, dans cette sphère un cube, et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

Dans un autre cube égal au premier on inscrit un cylindre ayant pour axe une des diagonales du cube et dont chaque base soit tangente à trois des faces du cube; dans ce cylindre, dont les dimensions sont déterminées en conséquence, on inscrit un cube dont les bases soient inscrites dans celles du cylindre. Dans ce nouveau cube on recommence la même construction, et ainsi de suite à l'infini.

Calculer le rapport de la limite de la somme des volumes des sphères à la limite de la somme des volumes des cylindres.

CLERMONT 1873.

Démontrer que la fraction $\frac{n-1}{n}$ est à la fois par excès ou par défaut la racine carrée, à $\frac{1}{n}$ près de deux fractions $\frac{n-2}{n}$ et $\frac{n-1}{n}$, en désignant par n un nombre entier quelconque plus grand que 2.

MONTPELLIER 1875.

Étant donnés deux cercles et un point, décrire de ce point un cercle qui détermine sur les deux premiers deux cordes d'intersection égales. Résoudre par le calcul la même question en supposant que les cordes, au lieu d'être égales, soient dans un rapport donné.

Discuter les formules, examiner les simplifications qu'elles éprouvent lorsque le rapport des cordes est égal à l'unité; rapprocher dans ce cas la solution analytique de la solution géométrique.

PARIS 1873.

On joint deux points fixes pris sur une circonférence à un point quelconque de cette circonférence, et du milieu de l'une des cordes ainsi obtenues on abaisse une perpendiculaire sur l'autre.

Trouver le lieu du pied de cette perpendiculaire.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE PARIS

Session d'avril 1878.

COMPOSITIONS DU 4 AVRIL.

1. Partager un nombre donné A en deux parties telles que si l'on multiplie respectivement ces deux parties par deux nombres donnés *m*, *n*, la somme des carrés des produits ainsi obtenus, soit minima.

Rép. Les deux parties sont $x = \dfrac{an^2}{m^2+n^2}$ et $y = \dfrac{am^2}{m^2+n^2}$

$$\text{d'où } \frac{x}{y} = \frac{n^2}{m^2}$$

2. La distance d'une planète au soleil étant supposée égale à 30 fois la distance de la terre au soleil, calculer d'après la troisième loi de Képler le nombre d'années que dure la révolution de cette planète autour du soleil.

Rép. 164 années $+ \dfrac{1}{3}$ (environ).

3. Un corps solide flotte sur un liquide à 0° et la portion du volume immergé est les $\dfrac{98}{100}$ du volume total. La température du liquide s'élève, et à 25 degrés on reconnaît que le corps est complétement immergé. Connaissant le coefficient de dilatation R = 0,000026 du corps solide, trouver le coefficient de dilatation absolue du liquide.

Rép. 0,000843.

COMPOSITIONS DU 5 AVRIL.

1. Dans un triangle ABC on donne les deux côtés BA = c, AC = b, et la hauteur h partant du sommet A; on demande de calculer le côté a opposé à l'angle A.

Rép. $a = \sqrt{b^2 - h^2} \pm \sqrt{c^2 - h^2}$ (+ ou —, suivant que l'angle B est aigu ou obtus).

2. Trouver l'angle d'une droite donnée par ses projections avec la ligne de terre.

COMPOSITIONS DU 6 AVRIL.

1. Trouver le centre de gravité du périmètre d'un triangle.

2. Prouver que lorsque deux sphères se coupent leur ligne d'intersection est une circonférence.

COMPOSITIONS DU 8 AVRIL.

1. Le côté d'un décagone régulier est égal à 6 mètres; on demande de calculer à 1 centimètre près le rayon du cercle circonscrit.

Rép. R = $9^m,708$.

2. On donne le grand axe AA′ et les foyers F et F′ d'une ellipse qui n'est pas tracée. On donne en outre un point P; mener par ce point une droite qui soit tangente à l'ellipse et construire le point de contact.

3. Une barre de fer et une barre de cuivre sont juxtaposées et fixées à une même extrémité; elles ont même longueur 3 mètres à 100 degrés. Quelle serait, à 0, la distance de leurs extrémités libres, le coefficient de dilatation du fer étant de 0,00001 et le coefficient de dilatation du cuivre étant de 0,000018?

Rép. $2^{mm},09$.

COMPOSITIONS DU 9 AVRIL.

1. La hauteur d'un tronc de cône est égale à 20 mètres, le rayon de la base inférieure est égal à 8 mètres et celui de la base supérieure est égal à 3 mètres; à quelle distance de la base inférieure faut-il mener un plan parallèle aux bases pour que la section faite dans le tronc de cône par ce plan ait une aire quadruple de celle de la base supérieure?

Rép. 4 mètres.

2. Expliquer sur un exemple la règle de la division des fractions.

COMPOSITIONS DU 11 AVRIL.

1. Indiquer et démontrer la règle à suivre pour réduire le plus simplement possible plusieurs fractions données au même dénominateur; application aux fractions $\frac{11}{12}, \frac{19}{20}, \frac{7}{13}, \frac{30}{36}$.

Rép. $\frac{715}{780}, \frac{741}{780}, \frac{420}{780}, \frac{650}{780}$.

2. Démontrer qu'un prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

COMPOSITIONS DU 12 AVRIL.

1. Démontrer que par quatre points non situés dans le même plan on peut toujours faire passer une sphère et que l'on n'en peut faire passer qu'une.

2. Construire l'angle qu'une droite, dont on donne les projections et qui rencontre la ligne de terre, forme avec cette ligne de terre.

COMPOSITIONS DU 15 AVRIL.

1. Deux sphères de rayon R et R' sont concentriques : Calculer le volume du segment sphérique déterminé dans la plus grande par un plan tangent à la petite.

Rép. $V = \frac{\pi}{3}(R - R')^2 (2R + R')$.

2. Diviser une droite en moyenne et extrême raison, donner la construction et la démontrer.

FACULTÉ DE MONTPELLIER.

16 juillet 1877.

Dans un cercle de rayon R inscrire un triangle rectangle tel que l'aire qu'il engendre en tournant autour de son hypoténuse soit un multiple m de l'aire du triangle. Dans le cas particulier où $m = 4$, calculer les angles de ce triangle.

18 juillet 1877.

Un tronc de cône est circonscrit à une sphère de rayon R, son volume est équivalent à $\frac{4}{3}\pi R^3 m$ dans lequel m est donné; calculer les rayons des cercles de base du tronc et discuter les formules trouvées.

30 juillet 1877.

Dans un demi-cercle où $R = 1^m$, inscrire un triangle rectangle tel que le volume qu'il engendre en tournant autour de son hypoténuse soit une fraction m du volume engendré par le demi-cercle. Dans le cas particulier où $m = \frac{1}{8}$, calculer les angles de ce triangle et le rayon du cercle inscrit.

1er avril 1878.

Le périmètre d'un triangle rectangle est de 15^m, sa surface est $0^{mq}, 750$. On demande de calculer les côtés de ce triangle, ses angles et le rayon du cercle inscrit.

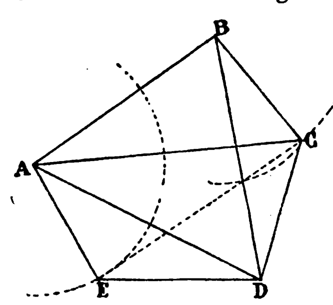
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 20.

Solution par M. MENAUD, du Lycée de Dijon.

Construire un pentagone ABCDE *connaissant les côtés* EA, AB, BC, *les diagonales* AD, BD, *l'angle* D, *et le rapport des côtés* DC, DE.

On construit le triangle ABD, dont on connaît les trois côtés; il reste à déterminer les sommets E et C. Le point C est d'abord sur la circonférence décrite de B comme centre avec la longueur donnée de BC pour rayon; dans le triangle EDC, on connaît l'angle D, et le rapport de ED à DC. Ce triangle reste ainsi semblable à un triangle donné, et de plus son sommet D reste fixe, et son sommet E reste sur une circonférence décrite de A avec la longueur donnée de AE pour rayon; or, on sait que si un sommet d'un triangle reste fixe, et si l'un des autres sommets décrit une circonférence, le triangle restant semblable à un triangle donné, l'autre sommet décrit une circonférence; on aura donc un second lieu du point C, et par suite le point C sera déterminé. On pourra alors achever le triangle CDE, et par suite le pentagone sera déterminé.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. Vautré, de Saint-Dié; Boudin, de Commercy; Dilhan, de Castres.

QUESTION 70.

Solution par M. Vautré, à Saint-Dié.

On donne un angle YOX *et deux points fixes* A *et* B *sur le côté* OY *de cet angle. On joint ces points à un point variable* C *de* OX. *On demande les variations du rapport* $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{CB}^2}$, *quand le point* C *se déplace sur* OX. (Académie de Rennes.)

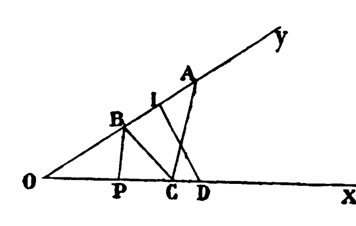
En posant $OA = a$, $OB = b$, $OC = x$, $YOX = \alpha$, les triangles AOC et BOC donnent respectivement

$$\overline{Ac}^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha$$
$$\overline{Bc}^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cos \alpha.$$

Si donc y représente le rapport à étudier, on a

$$y = \frac{a^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha}{b^2 + x^2 - 2bx \cos \alpha}. \qquad (1)$$

En divisant les deux termes du second membre par x^2, on reconnaît que y a pour limite l'unité, lorsque x augmente indéfiniment en valeur absolue; cela est d'ailleurs visible sur la figure. De plus quand le point C est en D, point de rencontre de ox avec la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB, on a encore $y = 1$. Donc si l'on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$, y part de l'unité pour y revenir, s'en éloigner et y revenir encore et par suite passe au moins par deux maximums ou minimums qu'on se propose de déterminer.



En appliquant le principe énoncé (t. I[er], p. 299), on a

$$\frac{a^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha}{b^2 + x^2 - 2bx \cos \alpha} = \frac{a^2 + x_1^2 - 2ax_1 \cos \alpha}{b^2 + x_1^2 - 2bx_1 \cos \alpha}$$

ou en chassant les dénominateurs, simplifiant et divisant par $x_1 - x$, on a

$$2xx_1 \cos \alpha - (a + b)(x_1 + x) + 2ab \cos \alpha = 0;$$

faisant $x_1 = x$ et divisant par 2, il vient

$$x^2 \cos \alpha - (a + b)x + ab \cos \alpha = 0 \qquad (2)$$

d'où $$x' = \frac{(a + b) + \sqrt{(a + b)^2 - 4ab \cos^2 \alpha}}{2 \cos \alpha}$$

$$x'' = \frac{(a + b) - \sqrt{(a + b)^2 - 4ab \cos^2 \alpha}}{2 \cos \alpha}.$$

La quantité placée sous le radical étant comprise entre $(a - b)^2$ et $(a + b)^2$, les deux racines x' et x'' sont toujours réelles et positives, et les longueurs OC' et OC'' qu'elles représentent doivent être prises dans le sens OX. De plus, si l'on se reporte sur la figure, le triangle OID donne

$$\text{OD} = \frac{a + b}{2 \cos \alpha}$$

valeur qui est précisément moyenne arithmétique entre x'

et x''. Donc les points C' et C'' sont situés à égale distance du point D, le premier à droite, le second à gauche.

Par le point B menons la droite BP perpendiculaire sur OX. Quand le point variable C passe à droite du pied P de cette perpendiculaire, il est évident que y décroît, car BC augmente et AC diminue. Donc y a déjà passé par un maximum qui correspond a x''; par suite le point C'' est situé sur le segment OP. D'ailleurs quand le point C passe à droite du point D, y décroît encore, et par suite va passer par un minimum qui correspond à x'. De plus si O' et P' sont les symétriques des points O et P par rapport au point D, le point C' est, d'après ce qu'on a vu, situé sur le segment O'P'.

Faisons varier l'angle α.

Pour $\alpha = 0$ il vient d'après les formules précédentes

$$x' = a, \quad x'' = b$$

En effet, on a alors $\cos \alpha = 1$ et l'expression (1) prend la forme $\frac{(a - x)^2}{(b - x)^2}$, fraction qui s'annule pour $x = a$, et devient infinie pour $x = b$. La question géométrique correspondante est alors de trouver sur une droite AB un point C dont les distances aux deux points fixes A et B soient dans un rapport donné.

L'angle α croissant vers 90°, le segment OP décroît sans cesse; par suite le point C'' tend à se confondre avec le point O, et x'' tend vers zéro. En même temps le point D, et *à fortiori* le point C' s'éloignant indéfiniment du point O, et x' tend vers l'infini.

Quand $\alpha = 90°$, $\cos \alpha = 0$ et l'équation (2)

devient $\quad (a + b)\, x = 0$

d'où $\quad x = 0$

L'expression (1) se réduit alors à $\frac{a^2 + x^2}{b^2 + x^2}$, fraction qui est en effet minima pour $x = 0$ et tend vers l'unité d'une manière continue quand x augmente indéfiniment en valeur absolue.

En se reportant à la discussion précédente, on voit que la valeur $x = 0$ se rapporte à x''. Le point C'' se confond

donc avec le point O, et le point D étant à l'infini, le symétrique C' du point C'' par rapport à D n'existe plus, ce qui explique la disparition de l'autre racine x'.

Enfin, quand α dépasse 90° les mêmes variations se reproduisent à gauche du point O.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Montenot, Franquet, de Troyes.

QUESTION 87.

Solution par M. PRISSET, élève au Lycée d'Angers.

Sur une droite AB, *on décrit une demi-circonférence ; de l'extrémité* C *du rayon perpendiculaire à* AB, *on décrit une circonférence passant par les points* A *et* D. *Une droite quelconque partant de* A *rencontre la première circonférence en* D *et la seconde en* E. *Démontrer que l'on a* $AD^2 + DE^2 + AB^2$.

Il est facile de voir que l'angle au centre ACB étant droit, l'angle inscrit AEB vaut 45°, et par suite que le triangle rectangle DEB est isoscèle. D'où l'on peut déduire immédiatement

$$AD^2 + DE^2 + = AD^2 + DB^2 + = AB^2.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Perrin, à Clermont; Bonnamy, Cordeau, à Lavoisier; Dalzon, à Saint-Étienne; Cuvelier, à Dinant; Montenot, Franquet, à Troyes; Belin, à Semur; Marcelin, Lamy, à Cherbourg; de Mézières, à Nantes; Menand, à Dijon; Trokay, à Liége; Schmitt, Roger, Schmitter, à Pont-à-Mousson; Quinson à Belley; Huet, à Orléans; Charlot, à Henri IV; Merle des Isles, à Moulins; Rey, Stegemann, à Saint-Louis; Thual, à Lorient; Cabut, au Havre; J.-B., lycée Charlemagne.

NOTE DE LA RÉDACTION. — Cette question très-simple n'a été proposée qu'à cause de l'intérêt qu'elle présente pour la solution de la seconde question proposée au concours de Saint-Cyr en 1877. Il s'agissait en effet de résoudre l'équation

$$x + \sqrt{a^2 - x^2} = b.$$

Si donc l'on suppose que AB est égal à a, il suffira, du point A comme centre, avec une longueur égale à b, de décrire une circonférence qui coupera ordinairement en deux points la circonférence décrite du point C comme centre. Si le point D est un de ces points, on mène la ligne AD qui rencontre la circonférence ABC en H. AH est égal à x, et HD à $\sqrt{a^2 - x^2}$.

La figure nous montre que AD doit être inférieur au diamètre AI. Ce qui donne $2a^2 - b^2 > 0$, condition de réalité que l'on trouve en algèbre. Ensuite, si l'on suppose $b^2 > a^2$, il y a deux solutions. Si $b^2 = a^2$, on trouve les solutions $x = 6$ et $x = a$. Si enfin $b^2 < a^2$, on trouve les points F et M d'intersection avec la circonférence C; on en déduit $x = AL$, ou $x = AK$. La première donne $\sqrt{a^2 - x^2} = b + x$, et la solution négative convient à l'équation; enfin la seconde donne $x - \sqrt{a^2 - x^2} = b$; ce n'est plus l'équation proposée, et la solution est à rejeter.

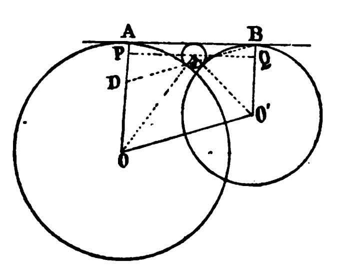
A. M.

QUESTION 88.

Solution par M. Gentil, élève au Lycée de Grenoble.

On donne deux cercles de rayons r *et* r′ *qui se coupent orthogonalement, puis l'on détermine un cercle qui touche les deux premiers et leur tangente commune. Démontrer que le diamètre* x *de ce cercle est donné par la relation*

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}} \quad \text{(Julliard.)}$$



Soient les deux cercles O et O′ qui se coupent orthogonalement et I le petit cercle de diamètre x. Par I menons PQ parallèlement à la tangente commune AB et par B soit BD parallèle à la ligne des centres. Le triangle O′IQ donne

$$\overline{IQ}^2 = \overline{IO'}^2 - \overline{O'Q}^2 =$$

$$\left(r' + \frac{x}{2}\right)^2 - \left(r' - \frac{x}{2}\right)^2$$

d'où $\qquad IQ = \sqrt{2r'x}$

De même le triangle OIP donnera

$$IP = \sqrt{2rx}$$

Ajoutant ces deux égalités, il vient

(1) $\qquad IP + IQ = AB = \sqrt{2rx} + \sqrt{2r'x}$

Or le triangle ABD donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$$

or $\overline{BD}^2 = \overline{OO'}^2$ et puisque les cercles O et O' se coupent orthogonalement $\qquad \overline{OO'}^2 = r^2 + r'^2$

donc $\qquad \overline{AB}^2 = r^2 + r'^2 - (r - r')^2 = 2rr'$

d'où $\qquad AB = \sqrt{2rr'} \qquad (2)$

Égalant les deux valeurs (1) et (2) de AB, il vient

$$\sqrt{2rr'} = \sqrt{2rx} + \sqrt{2r'x}$$

d'où l'on tire facilement

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Perrin, de Clermont-Ferrand; Vautré, de Saint-Dié; Cordeau et Simon, école Lavoisier; Montenot, Tranquet, de Troyes; Beliif, de Semur; de Mézières, de Nantes; Demortain, de Doullens; Menaud, de Dijon; Gélinet, d'Orléans; Hugentobler, à Boppelsen (Suisse); Bouffez, à Amiens; Merle des Isles, à Moulins; J.-B., lycée Charlemagne.

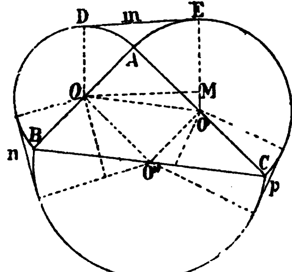
QUESTION 89.

Solution par M. Leblanc, élève du Collége de Cherbourg.

Soit ABC *un triangle rectangle en* A; *sur les trois côtés comme diamètres, on décrit des circonférences, et on mène les tangentes communes à ces circonférences considérées deux à deux. Si* m *est la longueur de la tangente commune aux cercles décrits sur les deux côtés de l'angle droit,* n *et* p *les longueurs des deux autres tangentes communes, démontrer la relation*

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{m^2}{n^2p^2}. \quad \text{(Julliard.)}$$

Soient a, b, c les côtés du triangle ABC. La ligne OO qui joint les milieux de AB et de AC est égale à la moitié de BC. Abaissant OM perpendiculaire sur O'E, on a OM = DE = m, donc



$$m = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{bc}{2}}$$

de même

$$n = \sqrt{\frac{c}{2}(a-c)}, \quad p = \sqrt{\frac{b}{2}(a-b)}$$

Par suite

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{2}{(a-c)(a-b)}$$

et

$$\frac{m^2}{n^2p^2} = \frac{2}{(a-c)(a-b)}$$

Donc, à cause du rapport commun

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{m^2}{n^2p^2}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Perrin, de Clermont-Ferrand; Cordeau, école Lavoisier, Paris; Vautré, de Saint-Dié; Trokay, à Liége; Hugentobler, à Boppelsen (Suisse); Menand, à Dijon; J.-B., lycée Charlemagne.

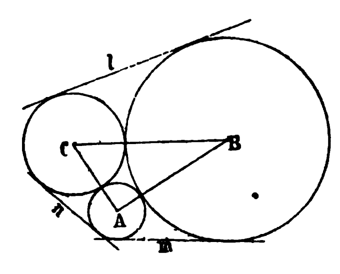
QUESTION 90.

Solution par M. G. Robin, élève du Lycée de Mont-de-Marsan.

Soit ABC *un triangle rectangle en* A. *Menons les trois cercles qui se touchent deux à deux et qui ont pour centre les sommets du triangle* ABC. *Puis menons les tangentes communes à ces cercles considérés deux à deux. Si* l *désigne la longueur de la tangente opposée à l'angle* A, m *et* n *deux autres, démontrer la relation*

$$\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{l^2}{m^2n^2} \quad \text{(Julliard.)}$$

Soient α, β, γ les rayons des trois cercles A, B, C. La tangente commune extérieure à deux cercles tangents extérieurement étant moyenne proportionnelle entre les deux diamètres, on a



$l^2 = 4\beta\gamma$, $m^2 = 4\alpha\beta$, $n = 4\alpha\gamma$
par suite

$$\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{4\alpha\beta\gamma}$$

Or le triangle étant rectangle, on a

$$(\beta + \gamma)^2 = (\alpha + \gamma)^2 + (\alpha + \beta)^2$$

d'où

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$$

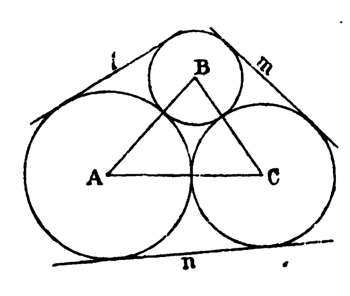
Donc

$$\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{\beta\gamma}{4\alpha^2\beta\gamma} = \frac{4\beta\gamma}{4\alpha\beta . 4\alpha\gamma} = \frac{l^2}{m^2 . n^2}$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Leblond, de Cherbourg; Demortain, de Doullens; Vautré, de Saint-Dié; Cordeau, école Lavoisier; Perrin, de Clermont-Ferrand; Duboscq, de Mont-de-Marsan; Trokay, à Liége; Hugentobler, à Boppelsen (Suisse); J.-B., lycée Charlemagne.

QUESTION 91.

Solution par M. Robin, élève du Lycée de Mont-de-Marsan.



Soit un triangle quelconque ABC. *On décrit les cercles ayant pour centres les sommets du triangle et se touchant deux à deux, puis on mène les tangentes communes à ces cercles pris deux à deux. Si l'on appelle* l, m, n *les longueurs de ces tangentes communes,* 2p *le périmètre du triangle, démontrer la relation*

$$2p = lmn \left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right).$$

(Julliard.)

On a, en désignant par α, β, γ les rayons des cercles de centre A, B, C,

$$l^2 = 4\alpha\beta,\ m^2 = 4\beta\gamma,\ n^2 = 4\alpha\gamma$$

d'où
$$lmn = 8\alpha\beta\gamma.$$

Par suite
$$lmn \left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) = 8\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{4\alpha\beta} + \frac{1}{4\beta\gamma} + \frac{1}{4\alpha\gamma}\right)$$
$$= 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2p.$$

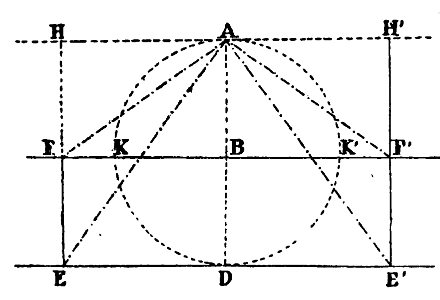
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Demortain, de Doullens; Perrin, de Clermont-Ferrand ; Vautré, de Saint-Dié; Cordeau, Simon, élèves de l'école Lavoisier; Leblanc, à Cherbourg; Trokay, à Liége; J.-B., lycée Charlemagne.

QUESTION 92.

Solution, par M. MARCELIN, élève du Collége de Cherbourg.

On donne un point A *situé en dehors de la bande déterminée par deux parallèles. On demande la position que doit prendre la perpendiculaire commune pour être vue du point* A *sous un angle maximum.*

Supposons le problème résolu et soit EAF l'angle maximum. Menons la perpendiculaire ABD et soient AB $= b$, AD $= a$; menons en outre AH parallèle à BF et soit H le point où cette parallèle rencontre EF prolongée. Soient ED $= x$, HAE $= \beta$, HAF $= \alpha$.



on a
$$b = x \text{ tg } \alpha,\ a = x \text{ tg } \beta$$

d'ou
$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{x},\ \text{tg } \beta = \frac{a}{x}$$

or EAF $= \beta - \alpha$, donc tg EAF $= \dfrac{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \alpha}$ (1)

Dans cette expression remplaçons tg β et tg α par leurs valeurs, on a après simplifications

$$\text{tg EAF} = \frac{(a - b)\,x}{x^2 + ab}$$

telle est l'expression qu'il s'agit de rendre maximum.

Égalant à m, chassant les dénominateurs et ordonnant, on trouve finalement l'équation

$$mx^2 - (a - b)\,x + mab = 0$$

d'où $$x = \frac{(a - b) + \sqrt{(a - b^2 - 4abm^2}}{2m}$$

Pour que x soit réel, il faut que

$$4m^2ab < (a - b)^2$$

d'où $$m^2 < \frac{(a - b)^2}{4ab}$$

donc le maximum de m est $\dfrac{a - b}{2\sqrt{ab}}$

alors $x = \sqrt{ab}$, ce qui montre que x doit être moyen proportionnel entre a et b. De là la construction suivante : sur AD comme diamètre décrivons une circonférence qui rencontre FB en K. Par le point A menons AH parallèle à FB et par suite à ED, puis du point A comme centre avec AK pour rayon décrivons un arc de cercle qui coupe AH en H, menant HFE perpendiculaire à EE′, la portion FE de cette perpendiculaire qui est comprise entre les parallèles données, répond à la question, c.-à-d. que l'angle FAE est maximum. La circonférence de diamètre AD rencontrant FB en un second point K′, le problème admet une seconde solution. En faisant une construction analogue à la précédente, on trouvera que la perpendiculaire F′E′ répondra également à la question.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Belin, de Semur; Lefèvre, lycée Louis-le-Grand; Depallières, à Belley; Vautré, à Saint-Dié; Demortain, à Doullens; Maille, à Agen; Robin, de Mont-de-Marsan; Merle des Isles, à Moulins; Tissier, de Châteauroux; Dalzon, de Saint-Etienne; Leblanc, Vuillemin, à Cherbourg; Franquet, Bruyand, à Troyes ; Bouffez, à Amiens ; Gelinet, à Orléans; Thual, à Lorient. M. Charlot élève du lycée Henri IV, nous a adressé de cette question une solution purement géométrique; J.-B. lycée Charlemagne.

BIBLIOGRAPHIE.

Le Baccalauréat ès sciences, *par MM.* Jullien, *professeur de sciences, et* Leyssenne, *chargé du cours de Baccalauréat ès sciences à Sainte-Barbe. — Paris, librairie Delagrave.*

Cet ouvrage, dont la partie relative aux Mathématiques est actuellement terminée, vient combler une lacune dans les ouvrages servant de guides aux élèves, non-seulement se préparant au Baccalauréat ès sciences, mais même voulant aborder les examens des écoles qui ne demandent que des Mathématiques élémentaires. C'est plus qu'un memento d'examen, et mieux qu'un manuel; en effet, ce n'est qu'un guide forçant les élèves à un travail personnel plus intelligent que celui qui consiste seulement à lire, même attentivement, des démonstrations complètes, faites par le professeur, mais que l'élève ne s'assimile pas par la lecture. Il faut ici que l'élève, avec ce guide seul entre les mains, recherche de lui-même les raisonnements, en suivant l'ordre des théorèmes qui lui sont énoncés sous une forme précise, et non plus comme des questions. C'est un programme et non un questionnaire qu'il a entre les mains. — Quant à l'ordre suivi dans cet ouvrage, comme le disent les auteurs dans leur préface, il n'a rien d'absolu, et le professeur qui ferait suivre pour l'ensemble du cours le Baccalauréats ès ciences, pourrait fort bien, par exemple, suivre l'ordre de Legendre pour le troisième livre de Géométrie, s'il le trouve préférable; il lui suffirait de faire substituer, par ses élèves, son programme personnel pour telle ou telle partie du cours, à ce programme général. Mais il nous semble que l'emploi de ces sortes de programmes pourrait avoir surtout pour résultat de supprimer les leçons dictées qui ont pris tant d'importance maintenant dans la plupart des cours de Mathématiques, et de forcer les élèves à sortir de l'habitude, qu'ils prennent de plus en plus, d'apprendre, sans demander d'explication, le cours du professeur, mot à mot s'ils le peuvent, sans se préoccuper autrement de l'ordre logique des raisonnements. — Si le recueil de MM. Jullien et Leyssenne pouvait avoir ce résultat, il aurait rendu un bien grand service à l'enseignement scientifique.

Nous ne ferons que signaler en terminant la collection de problèmes contenus dans ce recueil, problèmes proposés pour la plupart aux examens de la Sorbonne, et qui, par suite, sont bien certainement un choix précieux d'exercices de la force exacte du Baccalauréat ès sciences, au moins à Paris. — Il est à regretter que les auteurs n'aient pas pu se procurer un certain nombre de questions d'examens de province, ce qui aurait permis de comparer la force des examens dans les différents centres.

A. M.

Cours élémentaire de Mécanique, *à l'usage des élèves de troisième année de l'Enseignement special, des élèves de Mathématiques élémentaires et des aspirants aux emplois de Conducteurs des Ponts et Chaussées, par MM.* **Mondiet** *et* **Thabourin,** *agrégés de l'Université, anciens élèves de l'école de Cluny. — Paris, librairie Hachette.*

Nous avons à faire avant tout à cet ouvrage un reproche que l'on devrait faire à la plupart des traités élémentaires de Mécanique. Pourquoi un traité de mécanique ne commence-t-il pas par l'étude de la Cinématique? N'est-ce pas l'ordre logique? Ampère, dans sa *Philosophie des sciences*, indique bien cet ordre, car, dit-il, dans une science qui a pour objet les mouvements et les forces, ce sont les mouvements qui sont susceptibles d'observation immédiate, les forces sont cachées; par suite, il est facile de voir que la première étude dans une science d'observation, doit être l'étude du phénomène, qui est ici le mouvement. — Et si, le plus souvent, on se retranche derrière les programmes pour suivre tel ordre déterminé, ce n'est pas ici le cas; le programme de l'Enseignement spécial dit, en effet, expressément: Dans le programme qui suit, on suppose que le professeur commence son cours par l'étude des forces. S'il juge plus conforme à l'intérêt de ses élèves, ou bien s'il se sent mieux préparé à expliquer la Mécanique en commençant par la Cinématique, il demeure libre de faire cette transposition. — Ici, elle nous semble d'autant plus justifiée, que le cours s'adresse à des élèves plus jeunes que ceux de l'enseignement classique et que dans d'autres parties du cours, on insiste pour que le professeur commence par ce qui parle aux yeux.

Cette observation générale faite, nous devons dire que le premier volume de l'ouvrage de MM. Mondiet et Thabourin, celui qui traite des principes et répond à notre programme de Mathématiques élémentaires dans l'enseignement classique, est un ouvrage sérieux, bien fait, présentant d'une manière nette ce qui est nécessaire, non-seulement pour le Baccalauréat ès sciences, mais même pour les Écoles du gouvernement, et en particulier pour l'École forestière, bien que cet ouvrage eût paru avant les nouveaux programmes de cette école. L'étude des résistances passives et des chocs, qui ont une si grande importance pratique, y est traitée avec soin; les auteurs ont même mis, à la fin de leur volume, quelques notions très-succinctes sur la théorie mécanique de la chaleur; enfin, cent soixante-quinze problèmes viennent servir d'application aux diverses théories étudiées dans ce volume. Nous nous réservons de parler de la seconde partie de l'ouvrage lorsque nous aurons pu comparer le second volume qui a paru avec ce sous-titre: les Mécanismes, avec le troisième volume, actuellement sous presse, et qui doit traiter des Moteurs; les applications de la mécanique constituent en effet un tout que l'on peut séparer de la théorie, mais qu'il est bon d'examiner en une seule fois, en considérant en même temps les moteurs et les organes de transmission.

A. M.

QUESTIONS PROPOSÉES

109. — Construire géométriquement un quadrilatère dans lequel on connaît les quatre côtés et l'angle formé par le prolongement de deux côtés opposés. (*Reboul.*)

110. — Le cercle décrit sur un rayon vecteur d'une ellipse comme diamètre est tangent au cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.

111. — Les projections d'un point de la circonférence circonscrite à un quadrilatère sur les quatre côtés déterminent huit segments tels que le produit de quatre segments non consécutifs est égal au produit des quatre autres. (*Perrin.*)

112. — Trois cercles sont tracés dans un plan de telle manière que chacun d'eux touche les deux autres; trouver le rayon du cercle qui passe par les points de contact des cercles, et celui du cercle qui passe par les centres. Trouver aussi la surface du triangle obtenu en joignant les centres des trois cercles primitifs.

113. — Trois cercles dont les centres sont en ligne droite sont tangents deux à deux. Trouver le rayon d'un cercle tangent à la fois aux trois cercles donnés.

Avis. — Nous prions nos lecteurs de vouloir bien nous faire parvenir le plus tôt possible les sujets de concours académiques de 1878, ainsi que les questions posées aux examens du baccalauréat aux dernières sessions (juillet et novembre 1877, et avril 1878).

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 7824-8.

ÉTUDE SUR LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMETIQUE

par F. R. A.

(*Suite*, voir page 129.)

VIII. Du calcul de la septième opération.

Les traités d'Algèbre donnent une méthode de résolution de l'équation exponentielle $a^x = b$ (voir Bourdon, *Éléments d'Algèbre*, nos 202 et suivants). On arrive, par des formations successives de puissances, à développer x en *fraction continue*.

C'est le même problème que nous allons présenter sous un aspect différent, en nous basant sur la notion même de l'Exponentation.

Nous ferons d'abord le calcul sur plusieurs exemples.

1er exemple.

$$23^x = 6\ 436\ 343 \quad \text{d'où } x = 6\ 436\ 343\ (:)\ 23$$

6 436 343	23				
1 83	279 841	23			
226	49	12 167	23		
19 3	3 8	66	529	23	
94	1 54	207	69	23	23
23	161	0	.0	0	1
0	0				

Il y a 5 divisions successives possibles, et chaque division enlève un facteur 23 ; donc 23 est 5 fois facteur dans le nombre donné, et $x = 5$; de sorte qu'on peut poser

$$23^5 = 6\ 436\ 343$$

2e exemple.

$0{,}015^x = 0{,}000\,003\,375$ d'où $x = 0{,}000\,003\,375$ (:) $0{,}015$

0,000 003 375	0,015		
375	0,000 225	0,015	
75	75	0,015	0,015
0	0	0	1

On a $x = 3$; ainsi $0{,}015^3 = 0{,}000\,003\,375$

3e exemple.

Résoudre l'équation $343^x = 7$ ou $x = 7$ (:) 343.

Le nombre 343, qui est donné ici comme *racine*, étant plus grand que 7, qui est donné comme *puissance*, l'exposant x doit être entre *zéro* et 1 ; car $343^0 = 1$, et $343^1 = 343$.

On peut donc mettre x sous la forme $1/n$, et poser

$$343^{1/n} = 7$$

Multiplions les deux exposants par n, ce qui revient à élever les deux membres à la puissance n^e, il vient

$$343 = 7^n$$

d'où $n = 343$ (:) $7 = 3$

donc $x = 1/3$, et l'on a $343^{1/3} = 7$

343	7
49	7
7	7
1	

La puissance 1/3 de 343 n'est autre chose que la racine 3e ou cubique de ce nombre; et cette racine est bien 7.

4e exemple.

Résoudre l'équation $25^x = 78\,125$

78 125	25		
3 1	3 125	25	
62	62	125	25
125	125	0	5
0	0		

Ce premier calcul montre que $78\,125 = 5.25.25.25 = 25^3.5$.

Or, un nombre quelconque c est facteur, dans un produit ab, autant de fois qu'il est facteur dans a, plus autant de fois qu'il est facteur dans b (propriété 8[e] des rapports, remarque) ; on a donc

$$x = \frac{25^3.5}{25} = \frac{25^3}{25} + \frac{5}{25} = 3 + \frac{5}{25}$$

L'expression 5 (:) 25 a une valeur fractionnaire, que nous appellerons $1/n$; rappelons que si l'on renverse un rapport algébrique, la nouvelle raison est inverse de la première (propriété 7[e] des rapports).

On a $\frac{1}{n} = \frac{5}{25}$, donc $n = \frac{25}{5} = 2$.

Ainsi $1/n = 1/2$ et $x = 3 + 1/2 = 7/2$.

On peut donc poser $25^{7/2} = 78125$, identité facile à vérifier : on prendra d'abord la racine carrée de 25, et on élèvera cette racine à la 7[e] puissance.

5[e] exemple.

Équation à résoudre: $2048^x = 16$ ou $x = 16$ (:) 2048.

Voici d'abord les calculs :

2048	16		16	8	8	2		
44	128	16	0	2	0	4	2	
128	0	8				0	2	2
0							0	1

On pose successivement:

$$x = \frac{16}{2048} = 1/n,$$

$$n = \frac{2048}{16} = 2 + \frac{8}{16} = 2 + 1/n',$$

$$n' = \frac{16}{8} = 1 + \frac{2}{8} = 1 + 1/n'',$$

$$n'' = \frac{8}{2} = 3.$$

On reprend toutes ces valeurs en remontant, et l'on pose :

$$n'' = 3 \qquad n' = 1 + \frac{1}{3}$$

$$n = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} \qquad x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$$

On a donc enfin $x = 4/11$, et $2048^{4/11} = 16$.

Vérification. — Si l'on cherche les facteurs premiers de 2048, on trouve que ce nombre contient 11 facteurs 2 ; ce nombre 2 est donc la racine 11e de 2048 ; et cette racine 11e, élevée à la 4e puissance, donne 16.

Comme on le voit par ces premiers exemples, l'opération ne présente pas de difficulté lorsque l'exposant que l'on cherche a une valeur *commensurable.*

La marche générale du calcul peut être formulée comme il suit :

« *Pour trouver l'exposant, connaissant la puissance et la racine, il faut :*

» Diviser la puissance par la racine, le quotient obtenu par la racine, le nouveau quotient par la racine, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient moindre que le diviseur ;

» Faire alors une série analogue de divisions successives du diviseur par le dernier quotient des divisions précédentes jusqu'à ce qu'on obtienne de nouveau un quotient moindre que le diviseur ;

» Répéter encore ces séries d'opérations sur le dernier diviseur et le dernier quotient, jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient égal à 1 ;

» Compter et noter le nombre des divisions qui ont été faites dans chaque série d'opérations.

» *Le premier nombre est la partie entière de l'exposant cherché*; les autres nombres sont les dénominateurs successifs d'une*

(*) Ce premier nombre peut être égal à *zéro*, ce qui a lieu lorsque la puissance ne contient pas la racine.

fraction continue, qui complète la partie entière, et dont tous les numérateurs sont égaux à 1. »

Si l'on prend au hasard la puissance et la racine, l'exposant sera généralement un *nombre incommensurable,* dont on cherchera une valeur approchée.

6e exemple.

Résoudre l'équation $3^x = 4963$ ou $x = 4963$ (:) 3.

Nous calculerons les quotients avec trois décimales, et nous négligerons les restes. Nous nous bornons à poser ici les éléments essentiels de ce calcul, qui d'ailleurs a été fait avec cinq décimales,

	Dividende	Diviseur
	4 963,000	3
	1 654,333	3
	551,444	3
	183,814	3
(7)	61,271	3
	20,424	3
	6,807	3
	2,269	

(1) 3,000 | 2,269 ; quotient 1,321

(2) 2,269 | 1,321 ; quotient 1,716 | 1,321 ; quotient 1,298

(1) 1,321 | 1,298 ; quotient 1,018

(14)
1,298 | 1,018 ; 1,275 | 1,018 ; 1,252 | 1,018 ; 1,230 | 1,018 ; 1,208 | 1,018 ; 1,186 | 1,018 ; 1,165 | 1,018 ; 1,145
1,145 | 1,018 ; 1,124 | 1,018 ; 1,104 | 1,018 ; 1,084 | 1,018 ; 1,065 | 1,018 ; 1,046 | 1,018 ; 1,027 | 1,018 ; 1,009

(1) 1,018 | 1,009 ; quotient 1,008



On peut poser

$$x = 7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}} = 7\,{}^{47}/_{63} \text{ ou } 7{,}746$$

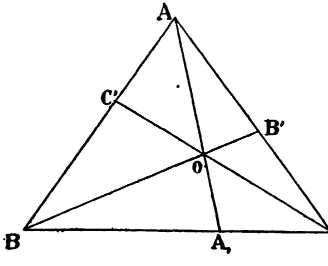
On a donc $3^{7,746} = 4963$.

Au lieu de développer les quotients en décimales, on peut mettre ces quotients sous forme de fractions absolues; alors les divisions se traduisent par des multiplications, opérations que l'on préfère généralement aux divisions dans les calculs. Les deux exemples suivants seront traités de cette manière. (*A suivre.*)

THÉORIE DU BARYCENTRE

(*Suite*, voir page 132.)

8. **Théorème** *de Jean de Céva.* — Puisque, dans la recherche du barycentre, l'ordre de composition des points est indifférent, on obtiendra en changeant l'ordre de ces points, des droites se coupant en un même point. Prenons un triangle ABC, l, m, n, trois coefficients correspondant aux trois sommets, O le barycentre des points A, B, C ; on peut l'obtenir de trois façons différentes ; si A′ $(m + n)$, B′ $(n + l)$, C′ $(l + m)$ sont les barycentres de (B, C), (C, A), (A, B), les droites AA′, BB′, CC′ se coupent au point O.



On a de plus $\dfrac{OA}{OA'} = -\dfrac{m+n}{l}$; $\dfrac{OB}{OB'} = -\dfrac{n+l}{m}$; $\dfrac{OC}{OC'} = -\dfrac{l+m}{n}$.

Inversement si le point O est donné, on peut toujours déterminer les coefficients l, m, n, de telle sorte que O soit le barycentre des trois points A, B, C. Il suffit pour cela de déterminer les coefficients (ou plutôt le rapport de deux d'entre eux au troisième) par les relations

$$\frac{OA}{OA'} = -\frac{m+n}{l}; \quad \frac{AB'}{A'C} = \frac{n}{m}.$$

On a donc la proposition suivante qui n'est autre que le théorème de Jean de Céva :

Si trois lignes AA', BB', CC' *menées par les sommets d'un triangle* ABC *concourent en un même point* O, *chacune détermine sur le côté opposé deux segments tels que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres et de signe contraire.*

Car on aura $\frac{A'B}{A'C} = -\frac{n}{m}$; de même $\frac{B'C}{B'A} = -\frac{l}{n}$; $\frac{C'A}{C'B} = -\frac{m}{l}$.

En faisant le produit, on arrivera à la proposition énoncée.

9. On a aussi

$\frac{AA'}{OA'} = \frac{l+m+n}{n}$; de cette relation on tire facilement

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

La réciproque est vraie.

10. Dans le cas particulier où $l = m = n$, le point O est le point de concours des médianes ; dans ce cas, les triangles ABC, A'B'C' sont homothétiques par rapport au point O ; donc les points homologues des triangles sont en ligne droite avec ce point et en appelant P et P' deux points homologues, on a $\frac{PO}{OP'} = 2$.

On peut déduire de ce théorème des démonstrations très-simples des théorèmes suivants :

Dans un triangle, le point de concours des hauteurs, le point de concours des médianes et le centre du cercle circonscrit sont en ligne droite, et la distance des deux premiers points est double de la distance des deux derniers.

Car, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC n'est

pas autre chose que le point de concours des hauteurs du triangle A'B'C'.

Le rayon du cercle des neuf points est la moitié du rayon du cercle circonscrit, et son centre est au milieu de la ligne qui joint le point de concours des hauteurs au centre du cercle circonscrit.

Car le cercle des neuf points n'est autre chose que le cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

11. Soient quatre points A, B, C, D; soient l, m, n, p des coefficients correspondants, A', B', C', D', les barycentres correspondant aux groupes de trois points (BCD), (CDA), (DAB), (ABC); les quatre droites AA', BB', CC', DD' passeront encore au même point et on aura encore

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1.$$

Si $l = m = n = p$, les deux figures ABCD, A'B'C'D' sont homothétiques inverses par rapport au point O, le rapport étant $-\frac{1}{3}$, et l'on arrive au théorème suivant :

Si l'on mène successivement les diagonales d'un quadrilatère convexe, on le décompose chaque fois en deux triangles. Les quatre centres de gravité de ces deux triangles sont les sommets d'un nouveau quadrilatère neuf fois plus petit que le quadrilatère proposé et homothétique à ce quadrilatère.

12. Il existe des relations analogues pour un système de n points A, B, C, ... Soient A_{n-1}, B_{n-1}, etc. les centres des moyennes distances des systèmes de $(n-1)$ points dans lesquels n'entre pas A,B,C. Les droites AA_{n-1}, BB_{n-1}, etc. passent par le point O, centre des moyennes distances des n points, et sont divisées dans le rapport $-\frac{1}{n-1}$.

On a aussi $\Sigma \frac{OA_{n-1}}{AA_{n-1}} = 1$.

Soient A_2 le centre des moyennes distances de deux points quelconques du système, A_{n-2} le centre des moyennes distances de $n-2$ points restants ; les points A_2 et A_{n-2} sont deux points homologues de deux systèmes homothétiques

ayant pour centre le point O, et dont le rapport d'homothétie est $-\frac{2}{n-2}$, et ainsi de suite ; les centres des moyennes distances des deux groupes obtenus en prenant p points d'une part et $n-p$ points d'autre part sont toujours deux points homologues de deux systèmes homothétiques ayant pour centre O. Le rapport d'homothétie est $-\frac{p}{n-p}$.

13. Nous allons donner deux applications intéressantes des principes précédents, dues à Brassine, et indiquées dans les problèmes de mécanique rationnelle du P. Jullien.

Théorème I. — *Les centres de gravité du contour et de l'aire d'un polygone circonscrit à une circonférence sont toujours situés sur une droite qui passe par le centre de la circonférence; leurs distances au centre de la circonférence inscrite sont entre elles dans le rapport de 3 à 2.*

En effet, décomposons le polygone en triangles ayant leurs sommets communs au centre du cercle inscrit.

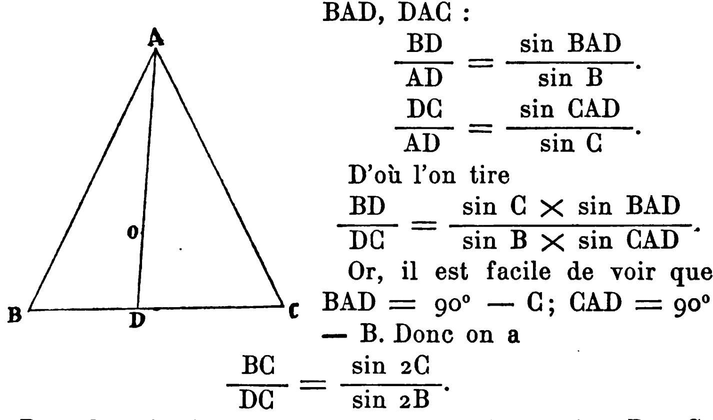
Plaçons ensuite aux trois sommets de chaque triangle des forces parallèles égales, proportionnelles aux aires des triangles, c'est-à-dire à leurs bases. Le centre de gravité du contour sera celui des forces placées au sommet du polygone, et le centre de gravité de l'aire s'obtiendra en combinant la force appliquée au centre de gravité du contour avec la force totale appliquée au centre du cercle, et qui est la moitié de la précédente. Il sera donc situé sur la droite qui joint le centre de la circonférence au centre de gravité du contour, et sa distance au premier point sera double de la distance au second, ce qui démontre le théorème.

Théorème II. — *Le centre de gravité d'un polyèdre circonscrit à une sphère est situé sur la droite qui joint le centre de gravité de la surface de ce polyèdre avec le centre de la sphère inscrite. Les distances du centre de gravité du polyèdre et du centre de gravité de la surface au centre de la sphère inscrite sont entre elles dans le rapport de 3 à 4.*

Ce théorème se démontrerait comme le précédent en remplaçant les triangles par des pyramides triangulaires ayant leur sommet commun au centre de la sphère inscrite.

14. **Théorème.** — *Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le barycentre des trois sommets, affectés respectivement des coefficients sin* 2A, *sin* 2B, *sin* 2C.

En effet, on a, en considérant successivement les triangles BAD, DAC :



$$\frac{BD}{AD} = \frac{\sin BAD}{\sin B}.$$

$$\frac{DC}{AD} = \frac{\sin CAD}{\sin C}.$$

D'où l'on tire

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\sin C \times \sin BAD}{\sin B \times \sin CAD}.$$

Or, il est facile de voir que BAD $= 90^\circ - C$; CAD $= 90^\circ - B$. Donc on a

$$\frac{BC}{DC} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}.$$

Donc le point D est le barycentre des deux points B et C, affectés respectivement des coefficients sin 2B et sin 2C. On verrait de même que si l'on prend le barycentre des points A et B, correspondant aux coefficients sin 2A et sin 2B, la ligne qui le joint au point C passe par le centre du cercle circonscrit.

15. **Théorème.** — *Le centre des hauteurs est le barycentre des sommets affectés respectivement des coefficients* tg A, tg B, tg C.

Car on a, en appelant H le pied de la hauteur abaissée du point A :

$$BH \operatorname{tg} B = AH; \; CH \operatorname{tg} C = AH.$$

Donc
$$\frac{BH}{CH} = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}.$$

On aurait de même, en appelant K le pied de la hauteur abaissée du point C : $\frac{BK}{AK} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$.

On en conclut que le barycentre correspondant aux coefficients tg A, tg B, tg C, est sur les hauteurs; il est donc à leur intersection.

16. **Théorème.** — *Le centre du cercle inscrit à un triangle est le barycentre des sommets affectés des coefficients* sin A, sin B, sin C.

En effet, si je mène la bissectrice AD on a

$$\frac{BD}{AD} = \frac{\sin BAD}{\sin B}; \quad \frac{CD}{AD} = \frac{\sin CAD}{\sin C}.$$

et comme BAD = CAD, on en tire $\frac{BC}{CD} = \frac{\sin C}{\sin B}$.

Dans le point D est le barycentre des points B et C correspondant aux coefficients sin B et sin C. On en déduira que le barycentre correspondant aux trois coefficients donnés doit se trouver à la fois sur les trois bissectrices.

17. **Théorème.** — *Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le centre des moyennes distances des centres des quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle.*

Car ce centre du cercle circonscrit est le centre des cercles des neufs points du triangle formé par les centres des trois cercles ex-inscrits. Or, il est facile de voir que le centre du cercle des neuf points, situé sur la ligne qui joint le point de concours des médianes au centre des hauteurs partage cette ligne, à partir du premier point en deux parties proportionnelles aux nombres 1 et 3. A. M.

CONCOURS ACADÉMIQUES DIVERS

Nous prévenons nos lecteurs que nous ne publierons pas, *en général*, de solutions des questions de concours, à moins qu'elles ne présentent un intérêt particulier. — Nous indiquerons, à la fin de l'année, les noms des correspondants dont les solutions étaient exactes.

CONCOURS DE 1846.

Classe de logique (sciences).

Étant donnés, dans un même plan, un cercle C et une droite AB qui ne rencontre pas le cercle, de chaque point M de la droite on mène deux tangentes au cercle et l'on joint les deux points de contact par une droite EF qui, prolongée, va rencontrer la droite AB en un point M'. On a ainsi pour chaque point M de cette droite un segment correspondant MM'. Cela posé, on demande :

1° S'il existe dans le plan de la figure un point O d'où l'on voit sous un angle droit chacun de ces divers segments;

2° On demande ensuite, hors du plan, s'il y a d'autres points qui jouissent de cette propriété;

3° Enfin s'il existe de tels points quand la droite AB rencontre le cercle.

Logique (lettres).

1° Soient AB, AC les deux côtés d'un parallélogramme et AD la diagonale. Si sur ces trois lignes comme base on construit trois triangles qui ont leur sommet en un même point I du plan de ce parallélogramme, on demande de prouver que le triangle fait sur la diagonale est égal à la somme ou à la différence des deux triangles faits sur les côtés, selon que le point I tombe en dehors de l'angle BAC et de son opposé au sommet ou en dedans de l'un de ces angles.

2° Dans un cercle qui a 2 mètres de rayon on prend un arc dont la corde a 7 décimètres. On demande quelle est à un millimètre la corde d'un arc double.

CONCOURS DE 1847.

Logique (sciences).

Soient menés dans un cercle une corde KK' et le diamètre DD' perpendiculaire sur cette corde. On prend un point O sur la circonférence et on mène de ce point les droites qui vont aux extrémités de la corde et aux extrémités du diamètre. Il s'agit de prouver que la somme des projections des deux dernières lignes sur l'une des deux autres OK est égale à cette même ligne OK et que la différence de ces mêmes projections est égale à l'autre ligne OK'. Ainsi si l'on appelle d et d' les pieds des perpendiculaires abaissées des points D et D' sur OK, il faut prouver que $od + od' = \mathrm{OK}$ et $od - od' = \mathrm{OK}'$.

Logique (lettres).

Soient menées par les sommets des trois angles A, B, C d'un triangle trois droites A*a*, B*b*, C*c* parallèles entre elles et terminées par leurs points respectifs de rencontre avec les directions des trois côtés opposés à ces angles. — Considérez les trois rectangles A*a*.B*b*, A*a*.C*c*, B*b*.C*c* qu'on pourrait faire avec ces trois lignes prises deux à deux. Il s'agit de prouver que l'un de ces rectangles est égal à la somme des deux autres.

CONCOURS DE 1848.

Logique (sciences).

Soient données dans le plan d'un cercle deux droites L, L parallèles entre elles; d'un point M de l'une d'elles on mène au cercle deux tangentes, lesquelles forment sur la seconde un segment AB, dont on prend le milieu I. Il s'agit de démontrer que la droite MI passera toujours par un même point fixe, quelle que soit la position du point M sur la première droite.

Logique (lettres).

On considère un tétraèdre régulier et la sphère qui y est inscrite. On demande le rapport du volume de la sphère à celui du tétraèdre. On donnera ce volume à 0,001 près.

CONCOURS DE 1849.

Logique (sciences).

Étant donné un parallélogramme ABCD, on mène la droite LL′ perpendiculaire à ses deux côtés opposés AB, CD, laquelle rencontre le premier côté en a et le prolongement du second en a'. Cette droite rencontre les autres côtés AD, BC en b et b' et les diagonales BD, AC, en c et c'. On demande de prouver que les circonférences des cercles décrits sur les trois segments aa', bb' cc' comme diamètre, ont les mêmes points d'intersection. On pourra examiner si le théorème aurait encore lieu dans le cas où la droite LL′ serait oblique aux côtés AB, CD, au lieu de lui être perpendiculaire.

Logique (lettres).

D'un point O pris sur le prolongement du rayon CA d'un cercle donné, mener une ligne OT qui touche la circonférence. Si la figure fait une révolution autour de CO, la tangente OT décrit la surface convexe d'un cône et l'arc AT celle d'un segment sphérique. On demande à quelle distance CO du centre C il faut prendre le point O, pour que la première surface soit à la seconde dans un rapport donné, comme par exemple de 2 à 3.

CONCOURS DE 1850.

Logique (sciences).

1° Par le point P d'intersection de deux circonférences de cercle on mène deux droites rectangulaires qui rencontrent la ligne des centres en a et a' et les deux circonférences en bc, $b'c'$. Il s'agit de démontrer qu'on a toujours la relation $\frac{ab}{ac} = \frac{a'b'}{a'c'}$.

2° Étant donnés deux points fixes A et B et deux lignes de grandeur constante, λ et μ, on prend dans la direction de AB un point quelconque M,

qu'on regarde comme le centre d'un cercle décrit de rayon R déterminé par la relation $\lambda . AM + \mu . BM = R . AB$. On demande de prouver que les différents cercles ainsi décrits des différents points M de la droite AB sont tous tangents à deux mêmes droites fixes.

Logique (lettres).

Dans l'intérieur d'un cône renversé dont la base et la hauteur sont connues, on laisse tomber une sphère qui devient tangente à la surface du cône dans toute l'étendue d'un petit cercle; on demande à quelle distance du sommet S du cône se trouve alors le centre de la sphère.

Application numérique : Le rayon CH de la base du cône égale 2 mètres, la hauteur CS est de 5 mètres et l'on sait que la sphère a 12 mètres carrés de surface; on prendra $\frac{22}{7}$ pour le rapport de la circonférence au diamètre et on calculera la distance cherchée à $\frac{1}{10000}$ de mètre près.

CONCOURS DE 1851.

Logique (sciences).

Étant donnés deux cercles O, O′ qui ne se touchent pas mais qui peuvent se couper, de chaque point M de l'un O, on mène deux droites aux centres de similitude S, S′ des deux cercles et ces droites rencontrent l'autre cercle O′ en quatre points m, n, m', n'. On demande de prouver que deux de ces quatre points sont sur un diamètre du cercle O′ et les deux autres sur une droite qui passe toujours par un certain point fixe, quel que soit le point M pris sur le cercle O.

Logique (lettres).

Étant donné le triangle ABC dont les trois côtés BC, AC, AB sont respectivement égaux aux nombres 15, 14, 13 et dont la surface est par conséquent 84 mètres carrés, on demande de placer dans l'intérieur de ce triangle un second triangle dont les côtés soient respectivement parallèles à ceux du premier, en soient également éloignés et comprennent entre eux une aire égale aux $\frac{3}{4}$ de l'aire du triangle proposé. On donnera à un millimètre près la distance qui sépare les côtés parallèles.

Note de la rédaction. — Cette question a été proposée en 1877 à l'examen écrit de l'École forestière.

CONCOURS DE 1852.

Logique (sciences).

1° Étant données deux droites AA′ et BB′ qui se coupent, et un point C situé sur la bissectrice CO de l'un des angles qu'elles forment, on mène par le point C une sécante quelconque et des points D et E où elle rencon-

tre les droites données on abaisse sur la bissectrice CO les perpendiculaires DF, EG ; puis ayant déterminé le milieu H de la distance CO, on décrit une circonférence sur GH comme diamètre. On demande le lieu des intersections de cette circonférence avec la perpendiculaire DF. (*Voir* 1er vol., *quest. prop.* 13, *sol.* p. 61).

2° Par un point quelconque pris dans l'intérieur de la base d'une pyramide régulière, on élève une perpendiculaire sur cette base; cette perpendiculaire rencontre toutes les faces latérales de la pyramide prolongées au besoin. On demande de démontrer que la somme des distances des points de rencontre au plan de la base est une quantité constante.

Logique (lettres).

1° Sur les diagonales AC, BD d'un parallélogramme ABCD on construit deux rectangles CAEF, BDGA dont les bases EF, GH rencontrent le côté AB en un même point I. On propose de démontrer que la somme des surfaces de ces deux rectangles équivaut à celle du parallélogramme.

2° Dans une sphère qui a $1^{m},19$ de diamètre on inscrit un cylindre de $1^{m},05$ de hauteur. On demande le volume de ce cylindre à $0^{mc},01$ près.

CONCOURS DE 1853.

Logique (sciences).

1° Étant donnés dans un même plan deux polygones semblables, trouver dans le plan un point tel que les droites menées de ce point à deux sommets homologues quelconques fassent entre elles un angle constant.

2° On donne deux tétraèdres ABCD, *abcd* tellement choisis que les droites A*a*, C*c*, D*d* qui joignent deux à deux les sommets homologues concourent en un même point. On demande de démontrer que, si les faces correspondantes se coupent, les quatre droites d'intersection sont dans un même plan.

Logique (lettres).

1° Calculer à un millimètre près le rayon d'un cercle sachant que si ce rayon augmentait d'un centimètre, l'aire du cercle augmenterait d'un mètre carré.

2° Étant données trois droites parallèles mais non situées dans le même plan, on porte sur l'une d'elles une distance AB égale à une longueur donnée et l'on prend arbitrairement un point C sur la seconde et un point D sur la troisième. Considérant la pyramide triangulaire qui a pour sommets les quatre points A,B,C,D, on propose de démontrer :

1° Que le volume de la pyramide est indépendant de la position des points C et D sur la droite où ils se trouvent;

2° Que ce volume est proportionnel à la longueur AB;

3° Qu'il reste le même quelle que soit celle des trois parallèles sur lesquelles on porte la longueur AB.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

ACADÉMIE DE RENNES

12 avril 1877.

— Quel rayon faut-il donner à une circonférence pour que le segment AmB qui répond à l'angle au centre de 100° 26′ 36″ ait une surface de 3mq 2566.

Conditions d'équilibre du treuil. Rapport entre la puissance et la résistance.

Calculer le travail des deux forces quand le treuil tourne d'un angle α donné très-petit.

— Trouver le poids de 158 centimètres cubes d'acide carbonique à la température de 32° et sous la pression $H = 0^m,752$; coëfficient de dilatation de l'acide carbonique = 0,00366; densité de l'acide carbonique = 1,52; poids du litre d'air = 1 gramme 3.

Session de juillet 1877.

— Calcul de π.

Résoudre le système des équations :

$$mxy - x^2 - y^2 = 1$$
$$m(ay + bx) - 2(ax + by) = 0$$

dans lequel les quantités a et b sont données par la relation :

$$mab - a^2\, b^2 = 1$$

— Une sirène dont le disque a 16 trous est à l'unisson avec un diapason qui fait 512 vibrations à la seconde. Elle fait 4 tours pendant qu'un pendule accomplit une oscillation. On demande quelle est la longueur de ce pendule.

— On donne un cercle de rayon R et un point A situés à la distance OA = a du centre O. On joint le point A à un point M de la circonférence par la ligne AM faisant avec AO un angle MAO = ω. En écrivant l'expression du carré du côté OM dans le triangle OMA, on obtient une équation qui permet de calculer AM = x au moyen de R, de a et de ω. — Interpréter la 2me racine. — Valeur limite de AM lorsque on donne à l'angle ω toutes les valeurs possibles.

Énoncer les lois de Képler. — Définition de la révolution sidérale et de la révolution synodique des planètes. — Établir la relation qui existe entre les durées de ces 2 révolutions pour une planète.

7 novembre 1877.

Recherche du plus petit multiple commun à plusieurs nombres.

2. — On donne les projections d'un point A et les deux traces d'une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Déterminer les projections et la longueur de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite donnée. (On accompagnera l'épure d'une explication très-succincte.

3\. — On met 1 kilogr. d'eau à 4° en contact avec une atmosphère indéfinie de gaz ammoniac sec et pur à 600mm de pression. Quel sera le poids de cette eau après qu'elle sera saturée de Az H^3. Le coefficient de solubilité du gaz à 4° est 670 et la densité du gaz à 0 est à 760mm = 0,591.

2 novembre 1877.

1\. — Calculer la longueur de la corde commune à deux circonférences de rayons a et b, et pour lesquelles la distance des centres égale c. Examiner le cas ou $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

2\. — Expliquer pourquoi dans la table trigonométrique les tangentes et les cotangentes ont même différence tabulaire. — A quoi servent ces différences? — Quelle est la cotg. de 147° 28′ 34″ 2.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.

ACADÉMIE DE CLERMONT.

Session de novembre 1877.

L'axe d'un cône fait un angle de 30° avec la génératrice; on place à l'intérieur du cône une sphère de rayon 1 touchant le cône suivant un cercle. On demande le rayon du cercle de contact.

Démontrer que le produit de deux nombres est égal au produit de leur plus petit multiple par leur plus grand commun diviseur.

Réduire plusieurs fractions à leur plus petit commun dénominateur.

Résoudre et discuter l'équation :

$$2 \sin 3x - 3 \sin 2x = m \sin x$$

— Dans quel rapport doivent être les volumes d'une montgolfière et d'un aérostat pour avoir la même force ascensionnelle dans de l'air à 0° et sous la pression de 760 millimètres. La montgolfière est remplie d'air à 150° et l'aérostat de gaz de l'éclairage à 15°. Le poids normal d'un litre d'air est 1 gr. 3 décig. La densité du gaz de l'éclairage est 0,56, le coefficient de dilatation des gaz 0,00366.

On circonscrit à une circonférence un parallélogramme; démontrer : 1° que ce parallélogramme est un losange ; 2° que la figure formée en joignant les points de contact est un rectangle ; 3° que le produit de la surface du parallélogramme par celle du losange est constant, trouver le minimum de l'une et le maximum de l'autre; 4° que si l'on fait tourner le losange et le rectangle autour de l'une des diagonales du losange, le produit des deux volumes engendrés est constant, trouver le minimum de l'un et le maximum de l'autre.

FACULTÉ DE CAEN.

Composition du 20 juillet 1877.

— 1° Soit M un point quelconque d'une parabole, P la projection de M sur l'axe de la courbe, N le point où la normale en M rencontre l'axe, S le sommet de la courbe; démontrer que la longueur PN et le rapport $\frac{MP^2}{SP}$ sont des quantités constantes. Calculer le rayon d'un cercle tangent à la parabole, ayant son centre sur l'axe et passant par un point donné de cet axe. On admettra comme démontrée l'égalité entre les angles qu'une tangente fait avec l'axe et avec le rayon vecteur du point de contact.

2° Qu'appelle-t-on vitesse d'un point qui a un mouvement varié? si le chemin parcouru croît proportionnellement au cube du temps compté à partir d'une certaine époque, comment varie la vitesse?

— Dans un ballon de 10 litres et à 20°, on introduit : 1° 15 litres de chlore à 10° sous une pression de 700 mm.; 2° 30 litres d'hydrogène à 12° sous une pression de 700 mm.; 3° 500 grammes d'eau. On demande : 1° la pression finale dans le ballon, sans tenir compte de la tension de la vapeur d'eau; 2° le poids des gaz qui s'y trouvent enfermés.

Composition du 7 novembre 1877.

— 1° On donne dans un quadrilatère une diagonale et les angles qu'elle forme avec les côtés; calculer l'autre diagonale. Déduire de la formule générale et traiter directement le cas où les angles adjacents sont égaux deux à deux.

2° Calculer la résultante de trois forces respectivement égales à 3, 4, 5 kilogrammes et dirigées suivant les arêtes d'un trièdre rectangle.

— Combien faut-il décomposer de chlorure de sodium par l'acide sulfurique pour obtenir 5 litres d'acide chlorhydrique mesuré à la température de 0°, et sous la pression de 760 mm.?

Densité du chlore = 2,44.
Densité de l'hydrogène = 0,0692.

EXAMENS DE ROUEN.

12 juillet 1877.

1. — On donne les éléments suivants pour déterminer un triangle ABC, savoir :

$$B - C = 58^\circ\ 23'\ 29''\ 5,$$
$$\log b = 3{,}4\ 287591,$$
$$\log c = 3{,}0\ 006764.$$

On demande de calculer le côté a et les angles B, C, A.

CONCOURS DE SAINT-CYR. — 1878.

Composition en mathématiques. — 3 heures.

1re QUESTION. (Calcul logarithmique).

Calculer la surface S *donnée par la formule*

$$S = 2\pi R^2 \left(\cos\varphi - \sin\varphi\right)$$

dans laquelle $R = 79^m,575$ *et* $\varphi = 23^\circ\ 27'\ 22''$. — (NOTA. — *La valeur de* S *représente la surface de la zone tempérée, à l'échelle de la carte de France.*)

On transformera d'abord $\cos\varphi - \sin\varphi$, de la manière suivante :

$$\cos\varphi - \sin\varphi = \sin(90 - \varphi) - \sin\varphi$$
$$= 2\cos 45 \sin(45 - \varphi)$$

d'où l'on déduit :

$$S = 4\pi R^2 \cos 45 \sin(45 - \varphi)$$

Or $45 - \varphi = 21^\circ\ 32'\ 38''$; et

$$\log 4 = 0,602.0600$$
$$\log \pi = 0,497.1499$$
$$\log R = 1,900.7766$$
$$\log R = 1,900.7766$$
$$\log \cos 45 = \bar{1},849.4850$$
$$\log \sin(45 - \varphi) = \bar{1},564.9190 \ldots \quad \ldots .8764\ (533)$$
$$\qquad\qquad 426$$

donc

$$\log S = 4,315.1671$$
$$S = 20661,75 \ldots\ldots 1671$$

1513

158

1477

103

2e QUESTION.

On donne les trois côtés a, b, c, *d'un triangle, et l'on suppose* $a > b > c$. *Déterminer la quantité* x *qu'il faut retrancher de chaque côté pour que le triangle qui aurait pour côtés* $a - x$, $b - x$, $c - x$, *soit rectangle. — Discussion sommaire.*

L'équation qui détermine x est, en tenant compte des conditions de l'énoncé,

$$(a - x)^2 = (b - x)^2 + (c - x)^2.$$

La quantité sous le radical se réduit à

$$2(a - b)(a - c)$$

elle est positive, puisque l'on a supposé

$$a - b > 0, \quad a - c > 0$$

donc les racines sont toujours réelles.

Discussion. — L'équation développée se met sous la forme

$$x^2 - 2x(b + c - a) + b^2 + c^2 - a^2 = 0.$$

La somme des racines est essentiellement positive, puisque b, c, a sont les côtés d'un triangle. Le produit sera positif ou négatif suivant que $b^2 + c^2$ sera supérieur ou inférieur à a^2, c'est-à-dire suivant que l'angle en A sera aigu ou obtus. Donc il pourra y avoir deux racines positives, ou une racine négative et une racine positive. — La racine négative s'interprète immédiatement par le changement de x en $-x$ dans l'équation ; elle est donc admissible au même titre que la solution positive.

Considérons le cas où les deux racines sont positives; il faut, pour que ces racines soient admissibles, qu'elles soient inférieures à c. En portant cette condition dans la valeur de x, on voit que la valeur qui contient le signe — devant le radical convient seule. Si elle est positive, elle répond donc à la question. Quant à la valeur précédée du signe $+$, elle convient à l'équation

$$(a - x)^2 = (b - x)^2 + (x - c)^2$$

ou à l'équation

$$(a - x)^2 = (x - b)^2 + (x - c)^2,$$

équations qui ne diffèrent pas de la proposée, mais qui permettent de supposer que x peut être supérieur à c, et même à b; la valeur x', en effet, est toujours inférieure à a, car en posant $b + c - a + \sqrt{2(a - b)(a - c)} < a$, on trouve après réduction

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 > 0$$

condition toujours remplie. On peut voir facilement à quels problèmes voisins du premier, correspond cette racine.

3e QUESTION.

On donne un triangle équilatéral ABC. *Mener par le point O, milieu de* BC, *une sécante qui rencontre en* M *le côté* AB, *et en* N *le prolongement du côté* AC, *et qui soit telle que la somme des aires des triangles* OMB, ONC *soit égale à l'aire du triangle* ABC*.

Par le point M, menons une parallèle MM' à la base BC. Le triangle M'OC sera égal au triangle MOC. Donc on devra avoir
$$\mathrm{OCN} + \mathrm{OCM'} = 2\mathrm{OCA}$$
or, ces trois triangles ont même sommet O, leurs bases sur une même ligne droite. Donc on doit avoir
$$\mathrm{CN} + \mathrm{CM'} = 2\mathrm{AC} = 2a.$$
Posons
$$\mathrm{BM} = \mathrm{CM'} = x;$$
$$\mathrm{CN} = y.$$
On aura la première équation
$$x + y = 2a$$
Menons par le point C une parallèle CH à AB, rencontrant ON au point H, les deux triangles OCH, OBM sont égaux, on en déduit CH $= x$. Or, les deux triangles semblables HCN, MAN donnent
$$\frac{x}{a-x} = \frac{y}{a+y}.$$
On en déduit $ax - ay - 2xy = 0$

La première donne $x = 2a - y$.

En remplaçant x par sa valeur, on a, après réduction
$$y^2 - ay - a^2 = 0$$
d'où l'on tire
$$y = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

La valeur positive convient au problème tel qu'il a été posé, et nous montre que le point N correspond à la seconde solution de la division du côté CA en moyenne et extrême raison. La valeur négative peut être interprétée; elle nous donne un point N sur AC, et le point M sur le prolongement de AB. Si l'on demande que l'on ait
$$\mathrm{BOM} - \mathrm{ONC} = \mathrm{ABC}$$

* Le lecteur est prié de faire la figure.

et que l'on répète absolument les raisonnements et les constructions précédentes, on en tire facilement les deux équations

$$x - y = 2a$$

$$\frac{x}{x - a} = \frac{y}{a - y}$$

qui ne diffèrent des précédentes que par le changement de y en $-y$. Donc l'équation finale ne différera de l'équation précédente que par le changement de y en $-y$, et par suite la valeur absolue de la solution négative conviendra à ce cas.

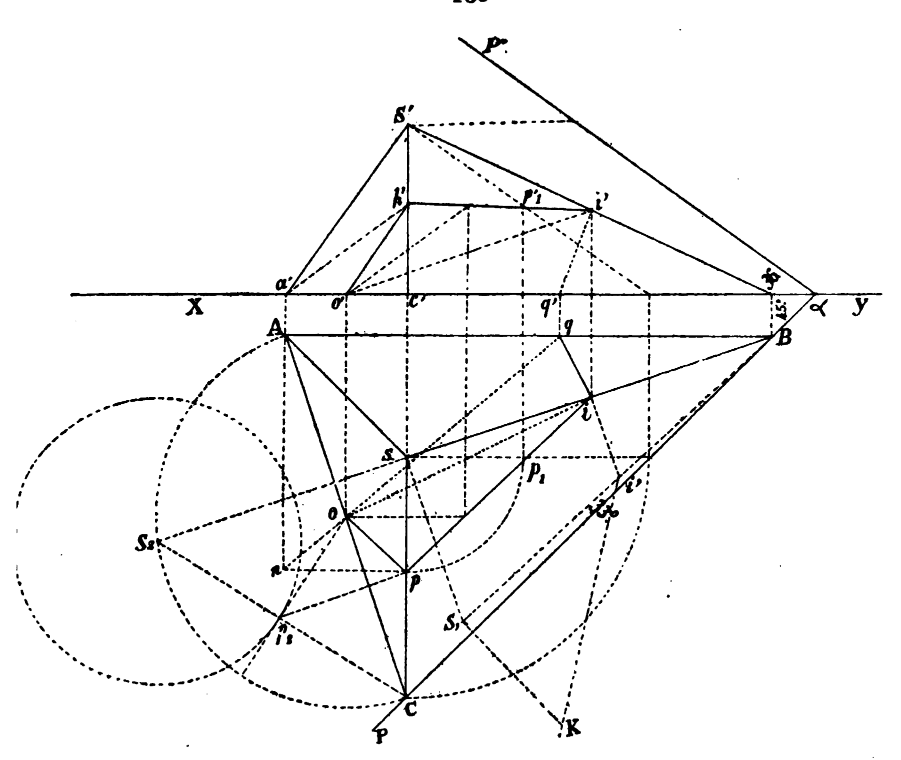
Épure de géométrie descriptive.

On donne un plan PαP′ *dont les traces font avec la ligne de terre* XY *des angles* PαX $= 45°$, *et* P′αX $= 36°$ (*le point* α *étant situé à droite et à* 100 *millimètres du point* m, *milieu de la ligne de terre*). — *On donne en outre un point* S *situé dans le plan* PαP′, *à* 42 *millimètres en avant du plan vertical de projection et à* 45 *millimètres au-dessus du plan horizontal. Ce point* S *est le sommet d'un tétraèdre* SABC *qui s'appuie par sa base* ABC *sur le plan horizontal de projection. L'angle solide* S *est trirectangle, le plan de la face* SAB *du tétraèdre est parallèle à la ligne de terre, et la face* SBC *est dans le plan* PαP′. — *Cela posé, on demande :* 1° *de construire les projections du tétraèdre;* 2° *de prendre les points* O *et* I, *milieux des arêtes opposées* AC *et* SB, *et de tirer la droite* OI; 3° *de mener par cette droite* OI *un plan faisant un angle de* 33° *avec l'arête* SB; 4° *de construire les projections de la section faite dans le tétraèdre par ce plan.*

Solution.

(L'épure ci-jointe a été réduite à la moitié des données.)

1° Le point S est d'abord déterminé par l'intersection de la ligne de niveau du plan situé à 45 millimètres au-dessus du plan horizontal et de la ligne de front menée à 42 millimètres en avant du plan vertical. L'une des faces du tétraèdre étant dans le plan PαP′, l'arête SA est perpendiculaire à ce plan, et par suite on a immédiatement ses projections; sa trace horizontale A est un des sommets du tétraèdre. La face SAB a par suite sa trace horizontale paral-



lèle à la ligne de terre et passant par le point A. L'intersection de cette ligne avec Pα nous donnera le sommet B, et enfin l'arête SC, perpendiculaire à la face ASB, se projette suivant une perpendiculaire à AB, ce qui nous donne le point C, à l'intersection de cette perpendiculaire issue du point S avec la droite Pα. Nous avons donc ainsi la projection horizontale du tétraèdre, et nous en déduisons immédiatement sa projection verticale. — Remarquons en passant que, le tétraèdre étant trirectangle, la projection horizontale du sommet est au point de rencontre des hauteurs du triangle de base, situé dans le plan horizontal.

2° La droite OI, passant par les milieux des arêtes AC et SB, ses projections passent respectivement par les milieux des projections de ces droites.

3° Le plan mené par la droite OI, faisant avec SB un angle de 33°, est tangent au cône de révolution ayant IS pour axe et pour demi-angle, au sommet, l'angle de 33°. Si l'on cherche la trace de ce cône sur le plan ASC, perpendiculaire à IS, cette trace sera un cercle dont on détermine facilement en S_1K le rayon. Du reste, en faisant tourner le plan ASC autour de AC pour le rabattre sur le plan horizontal, le point S se rabattra en S_2, au point de rencontre d'une circonférence décrite sur AC comme diamètre et du prolongement de l'arête BS, d'après la remarque faite précédemment. Le point O ne changeant pas, on aura le rabattement de la trace du plan cherché sur le plan ASC en menant par le point O une tangente au cercle décrit de S_2 comme centre avec S_1K pour rayon. — Il y a deux solutions, nous n'en avons tracé qu'une pour ne pas surcharger l'épure.

4° En relevant la tangente Op_2, nous aurons l'intersection du plan précédent avec une des faces du tétraèdre. Pour obtenir rapidement ce relèvement, je prendrai immédiatement le point p_2 d'intersectien de la droite Op_2 avec l'arête SC, rabattue en S_2C, et je relèverai ce point par la méthode ordinaire. Pour avoir sa projection verticale, je ramènerai l'arête SC à être de front, ce qui me donnera le point $(p_1\, p_1')$, que je ramènerai en p', en menant par p_1' une parallèle à la ligne de terre. Le point (i,i') est du reste un point de l'intersection. Pour trouver le point (q,q') je cherche les traces des deux lignes de front du plan ; je fais passer l'une par le point O, et l'autre par le point (p,p'); cette dernière a pour trace le point n; la ligne no est la trace horizontale du plan, et par suite, en la prolongeant jusqu'au point q où elle rencontre AB, on a le quatrième sommet du quadrilatère de section. Il suffira pour avoir les projections verticales, de mener des lignes de rappel par les projections horizontales. A. M.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSEES

QUESTION 84.

Solution par M. Vautré, élève du Grand Séminaire de Saint-Dié.

La somme des n *premiers nombres de la forme* $1 + 3n(n-1)$ *est égale au cube de* n. (Brocot.)

Les n premiers nombres de la forme indiquée sont :

$$1 + 3.2.1 = 1 + 6.\frac{1.2}{2}$$

$$1 + 3.3.2 = 1 + 6.\frac{2.3}{2}$$

$$\vert$$

$$1 + 3.n(n-1) = 1 + 6\frac{n(n-1)}{2}.$$

Si l'on additionne les seconds membres, on voit que la somme S des premiers est

$$(1) \qquad = n + 6\left[\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \ldots . \frac{n(n-1)}{2}\right].$$

Les crochets renferment la somme des $n-1$ premiers nombres triangulaires. Cette somme est $\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$.

Portant cette valeur dans (1) il vient

$$S = n + n(n-1)(n+1) = n^3; \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Perrin, de Clermont-Ferrand; J. B., au lycée Charlemagne; Marcelin, Leblanc, à Cherbourg; Hugentobler, à Boppelsen; Jordan, à Montpellier; Menand, à Dijon.

QUESTION 92.

Solution par M. Demortain, élève de l'École communale de Doullens.

Si a *et* b *sont deux nombres premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair, la différence de leurs carrés ne peut être un carré que si* $a + b$ *et* $a - b$ *sont eux-mêmes des carrés parfaits.*

Je dis d'abord que $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux. En effet, s'ils n'étaient pas premiers entre eux ils admettraient un facteur premier commun qui, divisant $a + b$ et $a - b$, diviserait leur somme $2a$ et leur différence $2b$. Ce ne saurait être 2, puisque l'un des deux nombres a ou b étant impair et l'autre pair $a + b$ ou $a - b$ est impair; ce ne saurait être alors qu'un facteur commun à a et à b; mais ces deux nombres sont premiers entre eux par hypothèse, donc $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux. Leur produit, qui donne $a^2 - b^2$, ne pourra être carré parfait que si $a + b$ et $a - b$ sont eux-mêmes carrés parfaits; car s'il en était autrement, le produit des facteurs premiers de $a + b$ et de $a - b$ qui sont différents, $a + b$ et $a - b$ étant premiers entre eux, et dont tous les exposants ne seraient pas pairs, n'aurait pas tous les exposants de ses facteurs premiers pairs et par conséquent ne serait pas carré parfait.

Corollaire. — Les carrés égaux à la somme de deux autres sont tous donnés par la formule suivante dans laquelle x et y désignent des nombres entiers quelconques

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2 + \left(xy\right)^2.$$

Nota. — MM. Vautré, de Saint-Dié; Lamy, de Cherbourg, ont résolu la même question.

QUESTION 101.

Solution par M. HUGENTOBLER, de Boppelsen (Suisse).

Étant donné le carré ABDE, *sur la diagonale* AD, *je prends le point* C *tel que* $CD = \frac{AD}{3}$, *je joins* BC *et je forme le triangle* ABC. *On demande de démontrer en adoptant les notations ordinaires,*

1° $\operatorname{tg} A = 1$, $\operatorname{tg} B = 2$, $\operatorname{tg} C = 3$;

2° $\text{surf ABC} = b^2 - a^2 = \frac{c^2}{3}$.

En considérant les segments des côtés et des hauteurs,

3° $AB' = 3B'C$, $AC' = 2C'B$, $CA' = \frac{2}{3} A'B$;

4° $AO = 5OA'$, $BO = 2OB'$, $CO = OC'$.

En prenant le triangle A'B'C' *formé par les pieds des hauteurs de* ABC,

5° $\frac{c'}{3} = \frac{b'}{4} = \frac{a'}{5}$;

6° aire $A'B'C' = \frac{1}{5}$ aire ABC;

7° *Le rayon du cercle inscrit au triangle* A'B'C' *est le* $\frac{1}{5}$ *de celui du cercle circonscrit au triangle* ABC. (Gambey.)

1° Dans le triangle ABC l'angle A étant de 45°, on a $\text{tg} A = \text{tg} 45° = 1$. Le triangle rectangle C'CB donne

$$CC' = C'B \text{ tg } B,$$

d'où $$\text{tg } B = \frac{CC'}{C'B};$$

or $$CC' = \frac{2AB}{3} \text{ et } C'B = \frac{AB}{3};$$

donc $$\text{tg } B = \frac{2}{3} . 3 = 2.$$

Enfin le triangle rectangle B'BC donne $\text{tg } C = \frac{BB'}{CB'}$ et comme $BB' = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$ et $CB' = \frac{AB\sqrt{2}}{6}$, on a

$$\text{tg } C = \frac{AB\sqrt{2}}{2} \times \frac{6}{AB\sqrt{2}} = 3.$$

2° On a $\text{surf } ABC = \frac{bc \sin A}{2}$; (1)

de plus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, ou en remplaçant bc par sa valeur tirée de (1) et désignant par S la surface du triangle ABC : $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \text{ cotg } A$.

On trouverait de même

$$b^2 = a^2 + c^2 - 4S \text{ cotg } B.$$

Retranchons la première de la seconde de ces égalités,

on a $$b^2 - a^2 = 2S(\text{cotg}\,A - \text{cotg}\,B);$$

or $\text{cotg}\,A = 1$, $\text{cotg}\,B = \frac{1}{2}$; donc

$$b^2 - a^2 = S.$$

On a encore $S = \frac{c.CC'}{2}$; or $CC' = \frac{2c}{3}$; donc $S = \frac{c^2}{3}$.

3° Les deux triangles rectangles AB'B et BB'C donnent $BB' = AB'\,\text{tg}\,A$, $BB' = B'C\,\text{tg}\,C$, d'où $AB'\,\text{tg}\,A = B'C\,\text{tg}\,C$, et en remplaçant les tangentes par leurs valeurs

$$AB' = 3B'C.$$

On aurait de la même manière

$$AC'\,\text{tg}\,A = C'B\,\text{tg}\,B,$$

ou $$AC' = 2CB',$$

et $$CA'\,\text{tg}\,C = A'B\,\text{tg}\,B$$

ou $$3CA' = 2A'B$$

ou enfin $$CA' = \frac{2}{3}A'B.$$

4° Les deux triangles rectangles AA'C et OAC' donnent :
$AA' = A'C\,\text{tg}\,C$, $OA' = A'C\,\text{tg}\,(90 - B) = A'C\,\text{cotg}\,B$

d'ou $$\frac{AA'}{\text{tg}C} = \frac{OA'}{\text{cotg}B}.$$

ou $$\frac{AA'}{2} = 3OA'$$

et $$AA' = 6OA'$$

Retranchant OA' des deux membres, on a

$$OA = 5OA'.$$

Les triangles AOB', ABB' donnent pareillement

$$BB' = 3OB'$$

et en retranchant OB' des deux membres

$$OB = 2OB'.$$

Enfin les triangles CC'B et OC'B donnent

$$CC' = 2OC, \text{ ou } CO = OC'.$$

5° Les triangles BC'B' et BCC' donnent

$$\frac{a'}{BC'} = \frac{\cos A}{\cos B};\ BC' = a\cos B$$

donc $$a' = a\cos A$$

de même $$b' = b \cos B$$
$$c' = c \cos C$$

Remplaçant dans ces expressions les cosinus par les tangentes, il vient :

$$a' = \frac{a}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 A}}, \quad b' = \frac{b}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 B}}, \quad c' = \frac{c}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 C}},$$

ou $$a' = \frac{c\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}, \quad b' = \frac{2c\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, \quad c' = \frac{c}{\sqrt{10}}$$

Résolvons par rapport à c et simplifiant, on a

$$12a' = 15b' = 20c'$$

et en divisant par 60 on obtient

$$\frac{c'}{3} = \frac{b'}{4} = \frac{a'}{5}$$

6° Comme les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices des angles du triangle A'B'C' et que les moitiés de ces angles sont égales à 90° — A, 90° — B, 90° — C, on a

$$A' = 180 - 2A$$

mais $2A = 90°$ donc $A' = 90°$ et par suite le triangle A'B'C' est rectangle en A' ; sa surface $S' = \frac{b'c'}{2}$ et, d'après les résultats de 5°, $b' = \frac{4c'}{3}$ donc $S' = \frac{2c'^2}{3}$; mais $c'^2 = \frac{c^2}{10}$ donc $S' = \frac{c^2}{15}$. En comparant cette formule au dernier résultat de 2°, $S = \frac{c^2}{3}$, on trouve $S' = \frac{S}{5}$.

7° Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est $R = \frac{abc}{4S}$ ou $R = \frac{c\sqrt{10}}{6}$, en remplaçant a, b et S par leurs valeurs en fonction de c. D'autre part le rayon r du cercle inscrit au triangle rectangle A'B'C' est $r = p' - a'$ p' étant le demi-périmètre du triangle A'B'C'. Si nous ajoutons les résultats de 5°

$$\frac{c' + b' + a'}{3 + 4 + 5} = \frac{p'}{6} = \frac{c'}{3}$$

d'où $$p' = \frac{6c'}{3} = \frac{6c}{3\sqrt{10}}$$

donc $$p' - a' = \frac{6c}{3\sqrt{10}} - \frac{c\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{10}}{3.10} = r$$

Comparant R et r on trouve

$$\frac{R}{5} = r.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Gelinet, d'Orléans; Bacy, de Châteauroux; Vautré, de Saint-Dié; Levi, de Nancy; Hoc, de Longwy; Leblanc, Marcelin, de Cherbourg; Cordeau, école Lavoisier; Menand, de Dijon; Isay, de Nancy; Clerget, pensionnat Saint-Louis, Saint-Étienne; Chersey, collége Chaptal; Demortain, de Doullens; Garnier, lycée Saint-Louis; Laclette, à Pau; Malesset, à Poitiers; Reuss, à Belfort.

AVIS

1. — Nous avons eu soin de prévenir, dès le début de notre publication, que nous ne proposerions dans le journal que des questions dont nous connaîtrions la solution, et que nous saurions être de la force des classes de Mathématiques Élémentaires. Pour rester dans les conditions que nous avons ainsi posées, nous prions nos correspondants de vouloir bien joindre à l'envoi des questions qu'ils nous proposent, au moins un aperçu de la démonstration. Cela nous permettra de nous assurer en même temps de l'exactitude de la proposition énoncée, et ne nous mettra pas dans le cas de recevoir, comme cela nous est déjà arrivé, des questions dont l'énoncé est faux. — Il va sans dire qu'en nous envoyant *l'énoncé réel* des questions de concours académiques et de baccalauréat, nos correspondants n'auront pas à y joindre les solutions, ces questions par leur origine même, devant être considérées comme exactes.

2. — Nous rappellerons en outre à nos lecteurs que, pour nous faciliter le classement des solutions, il est nécessaire qu'ils nous envoient chaque question sur une feuille séparée, en ayant soin d'y faire adhérer à la gomme ou autrement la figure tracée avec des dimensions ordinaires, sur une feuille à part, et dessinée avec beaucoup de soin.

3. — Enfin, un certain nombre de nos correspondants se plaignent de l'omission de leur nom à propos de plusieurs questions dont ils nous ont envoyé la solution. Nous devons dire à ce sujet que, par suite des nécessités d'impression, toute question, dont la solution se trouverait dans le numéro en cours de publication, et qui nous serait envoyée après le 2 du mois, ne pourrait pas être signalée dans le numéro, et que nous avons dû, à cause du grand nombre de solutions que nous recevons, nous imposer l'obligation de ne pas rappeler les solutions des questions déjà insérées. —

Comme il s'écoule en général au moins deux mois entre l'énoncé des questions et la publication des solutions, nos lecteurs ont, le plus souvent, le temps nécessaire pour résoudre les questions proposées; si, du reste, la question n'est pas résolue dans un numéro, nos lecteurs auront le loisir de nous envoyer la solution après l'apparition de ce numéro. — Enfin, nous rappellerons que nous ne signalons que *des solutions d'élèves*; nous invitons nos correspondants à vouloir bien mettre très-lisiblement sur chaque question leur nom et celui de l'établissement auquel ils appartiennent.

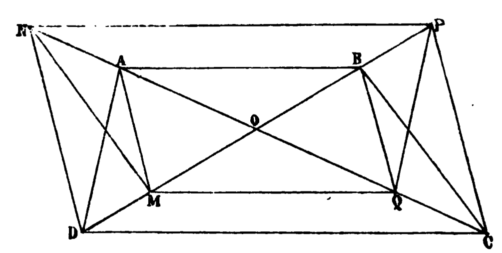
A. M.

QUESTIONS PROPOSÉES

114. — Dans tout triangle, la demi-différence de deux côtés est moyenne proportionnelle entre les distances, sur le troisième, du pied de la médiane à ceux de la hauteur et de la bissectrice intérieure.

Si l'on remplace la bissectrice intérieure par l'extérieure, il faut substituer la demi-somme des côtés à leur demi-différence. *(H. Lecocq.)*

115. — On donne un trapèze ABCD par les sommets duquel on mène quatre droites parallèles entre elles jusqu'à leur intersection avec les diagonales ou leur prolongement. En joignant consécutivement les points de rencontre, on obtient le quadrilatère MNPQ.



1° Démontrer que ce quadrilatère est un trapèze;

2° Que sa surface est constante; en déterminer la valeur. On supposera connus l'angle O et les droites OA, OB, OC, OD représentées respectivement par a, b, c, d;

3° Que le rapport des bases de ce trapèze est invariable;

4° Déterminer à quelle position de MQ et à quelle valeur de l'angle OBQ répond le minimum de leur somme.

Démontrer, en outre, que :

5° Les points (PQ, BC), (MN, AD) et O sont en ligne droite;

6° De même les points (AB, MQ), (NQ, DC) et O;

7° De même les points (AP, CM), (NB, DQ) et O;

8° Trouver les lieux géométriques des points (AP, CM) et (NB, DQ). *(H. Lecocq).*

116. — Étant donné un triangle BAC, on considère la bissectrice de l'angle A, et on joint un point quelconque M de cette bissectrice, considérée comme une droite indéfinie, aux sommets B et C. Étudier la variation du rapport des lignes MB et MC. *(de Lonchamps.)*

117. — Dans un triangle rectangle, on abaisse la perpendiculaire AD $= h$ sur l'hypoténuse et l'on désigne par r et r' les rayons des cercles inscrits dans les triangles ADB, ADC, et par R le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Démontrer les relations :

$$R^2 = r^2 + r'^2; \quad R + r + r' = h.$$ *(Thual.)*

118. — Si l'on abaisse d'un point O les perpendiculaires OD, OE, OF sur les côtés d'un triangle, on a

$$\text{cotg ADC} + \text{cotg BEA} + \text{cotg CFB} = 0.$$

(Bretschneider.)

119. — Les médianes d'un triangle forment avec les côtés qu'elles divisent en deux parties égales des angles comptés dans le même sens de rotation, dont la somme des cotangentes est nulle. *(Bermann.)*

120. — Si l'on prend dans l'intérieur d'un triangle un point O tel que ACO $=$ BAO $=$ CBO $= \theta$, on a.

$$\text{cotg}\, \theta = \text{cotg A} + \text{cotg B} + \text{cotg C}$$

(The Educational Times.)

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 10104-8.

ÉTUDE SUR LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE

par F. R. A.

(*Suite*, voir page 161.)

IX. *Application de l'Exponentation au calcul des logarithmes.*

Le logarithme vulgaire d'un nombre quelconque est l'exposant qui indique à quelle puissance il faut élever 10 pour avoir ce nombre.

Il suit de là que, pour obtenir les logarithmes des nombres 2, 3, 7, 11, etc., il suffit de résoudre directement les équations exponentielles $10^x = 2$, $10^x = 3$, $10^x = 7$, etc.

La recherche se fait directement et isolément pour un nombre quelconque.

7e *exemple.*

Recherche du logarithme de 2 par l'équation

$$10^x = 2, \text{ d'où } x = 2 \ (:) \ 10$$

Comme il n'y a pas de division possible de 2 par 10, la partie entière de x est nulle, et l'on posera $x = 1/n$.

Et puisque $1/n = 2 \ (:) \ 10$, il en résulte (prop. 7e des rapports),

$$n = 10 \ (:) \ 2 \text{ (voir calculs A).}$$

Calculs A

	10 (:) 2
(3)	10/2 ou 5
	10/4 ou 2,5
	10/8 ou 1,25
	10/16 ou 0,625*

Le quotient 10/16 étant plus petit que 1, la dernière division est nulle, puisque 10/8 ou 1,25 ne contient pas 2 une fois.

On a donc

$$n = 3 + \frac{10}{8} \ (:) \ 2 \text{ ou } 3 + 1/n'$$

$$n' = 2 \ (:) \ 10/8$$

* Ce quotient étant inférieur à 1, la division qui le donne ne compte pas.

Chaque division par 10/8 revient à une multiplication par 8/10; ainsi le nombre des divisions possibles de 2 par 10/8 revient au nombre des multiplications possibles de 2 par 8/10, tant que le résultat, qui est un véritable quotient, ne descendra pas au-dessous de 1.

Nous indiquerons ce nombre de multiplications possibles par le symbole (×), et nous dirons :

$$n' = 2\ (:)\ \frac{10}{8} = 2\ (\times)\ \frac{8}{10}^{**}$$

(Calculs B)

CALCULS B

2(:)10/8 ou 2(×)0,8
(3) { 1,6
1,28
1,024
0,819 2*

$$n' = 3 + 1{,}024\ (:)\ \frac{10}{8} \text{ ou } 3 + 1/n''$$

$$n'' = \frac{10}{8}\ (:)\ 1{,}024 = \frac{10}{8\ (\times)\ 1{,}024}^{**}$$

(Calculs C)

$$n'' = 9 + \frac{10}{9{,}9033}\ (:)\ 1{,}024 \text{ ou } 9 + 1/n'''$$

CALCULS C*

$\frac{10}{8}$ (:) 1,024
10/8,192
10/8,388 6
10/8,589 9
10/8,796 0
(9) { 10/9,007 1
10/9,223 3
10/9,444 6
10/9,671 2
10/9,903 3
10/10,141 0*

$$n''' = 1{,}024\ (:)\ \frac{10}{9{,}9033} = 1{,}024$$

$(\times)$ 0,990 33** (Calculs D)

$$n''' = 2 + 1{,}004\ (:)\frac{10}{9{,}903} \text{ ou } 2 + 1/n''''.$$

$$n'''' = \frac{10}{9{,}903}(:)\ 1{,}004$$

$$= \frac{10}{9{,}903\ (\times)\ 1{,}004}^{**}$$

(Calculs E)

$$n'''' = 2 + \ldots\ldots$$

En rapprochant les résultats, on trouve successivement :

$$x = \ldots\ldots\ 0 + \frac{1}{3} \text{ soit } \frac{1}{3} \text{ ou } 0{,}333\ 33$$

* Ce quotient étant inférieur à 1, la division qui le donne ne compte pas

** Tant que le résultat ne descendra pas au-dessous de 1.

Calculs D

1,024(:) $\frac{10}{9{,}903\ 3}$
(2) { 1,014
1,004
0,994 *

$$x = \ldots\ldots\ \frac{1}{3+\frac{1}{3}} \text{ soit } \frac{3}{10} \text{ ou } 0{,}300\ 00$$

$$x = \ldots\ \frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{9}}} \text{ soit } \frac{28}{93} \text{ ou } 0{,}301\ 08$$

Calculs E

$\frac{10}{9{,}903}$(:)1,004
(2) { 10/9,94
10/9,98
10/1,002 *

$$x = \ldots\ \frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{9+\frac{1}{2}}}} \text{ soit } \frac{59}{196} \text{ ou } 0{,}301\ 02$$

$$x = \frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{9+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}} \text{ soit } \frac{146}{485} \text{ ou } 0{,}301\ 03$$

Cette dernière valeur est bien celle que donnent les *Tables* pour le logarithme de 2.

8e exemple.

Calcul du logarithme de 753, par l'équation $10^x = 753$.

Calculs A

753 (:) 10
(2) { 75,3
7,53

Calculs B

10 (:) 7,53
(1) .. 10/7,53
10/56,7 *

x = 753 (:) 10 (Calculs A)

x = 2 + 7,53 (:) 10 ou 2 + $1/n$

n = 10 (:) 7,53 = $\frac{10}{1\ (\times)\ 7{,}53}$ (C. B)

n = 1 + $\frac{10}{7{,}53}$ (:) 7,53 ou 1 + $1/n'$

n' = 7,53 (:) $\frac{10}{7{,}53}$ = 7,53 (×) 0,753** (Calculs C)

* Ce quotient étant inférieur à 1, la division qui le donne ne compte pas.
** Tant que le résultat ne descendra pas au-dessous de 1.

Calculs C

$753 \ (:) \ \frac{10}{7{,}53}$
(7) 5,670 1
4,269 6
3,215 1
2,421 0
1,822 0
1,372 0
1,033 1
0,777 9*

Calculs D

$\frac{10}{7{,}53} \ (:) \ 1{,}033 \ 1$
(8) 10/7,779 2
10/8,036 6
10/8,302 5
10/8,577 2
10/8,861 0
10/9,154 2
10/9,457 1
10/9,770 1
10/10,093 3*

Calculs E

$1{,}033 \ (:) \ \frac{10}{9{,}770}$
(1) ... 1,009 3
0,986 1 *

Calculs F

$\frac{10}{9{,}77} \ (:) \ 1{,}009$
(1)... 10/9,953
10/10,046*

$n' = 7 + 1{,}033\ 1\ (:)\ \frac{10}{7{,}53}$ ou $7 + 1/n''$

$n'' = \frac{10}{7{,}53}\ (:)\ 1{,}033\ 1$

$= \frac{10}{7{,}53\ (+)\ 1{,}033\ 1}$ (**Calc. D)

$n'' = 8 + \frac{10}{9{,}770\ 1}\ (:)\ 1{,}033\ 1$ ou $8 + 1/n'''$

$n''' = 1{,}033\ (:)\ \frac{10}{9{,}770}$ 1033 $(\times)\ 0{,}977$** (Calculs E)

$n''' = 1 + 1{,}009\ 3\ (:)\ \frac{10}{9{,}770}$ ou $1 + 1/n''''$

$n'''' = \frac{10}{9{,}770}\ (:)\ 1{,}009\ 3$

$= \frac{10}{9{,}77\ (\times)\ 1{,}009}$** (C. E)

$n'''' = 1 + \frac{10}{9{,}953}\ (:)\ 1{,}009$ ou $1 + 1/n'''''$

$n''''' = 1{,}009\ (:)\ \frac{10}{9{,}953} = 1{,}009\ (\times)\ 0{,}995$** (Calculs G)

$n''''' = 2$, très-approximativement.

On peut donc conclure :

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

* Ce quotient étant inférieur à 1, la division qui le donne ne compte pas.

** Tant que le résultat ne descendra pas au-dessous de 1.

CALCULS G

$1,009\,(:)\ \dfrac{10}{9,953}$
(2) $\begin{cases} 1,004 \\ 0,999 \text{ soit } 1 \end{cases}$

soit $2 + \dfrac{306}{349}$

ou 2,876 79

C'est la valeur que donnent les *Tables* pour le logarithme de 753.

(*A suivre.*)

NOTE D'ALGÈBRE

(*Extrait d'une lettre à M.* BOURGET.)

. . . .

Parmi les questions posées aux derniers examens de *l'École polytechnique*, en voici une qui me paraît devoir intéresser les lecteurs de votre journal.

Il s'agit de trouver le minimum de l'expression

$$(ax + by + c)^2 + (a'x + b'y + c')^2 + (a''x + b''y + c'')^2\ *$$

ou plus généralement de

$$z = (a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 + \ldots + (a_nx + b_ny + c_n)^2.$$

On peut considérer cette égalité comme formant une équation *du second degré en* x, et de la discussion de cette équation, on peut déduire, comme nous allons le montrer, le minimum de z.

L'équation que nous nous proposons de discuter peut s'écrire :

(1) $x^2\Sigma a^2 + 2x[y\Sigma ab + \Sigma ac] + [y^2\Sigma b^2 + 2y\Sigma bc + \Sigma c^2 - z] = 0.$

Telle est l'égalité qui permet de calculer x quand on donne y et z; mais il faut que les valeurs d'y et de z soient tellement données que l'on ait

(2) $(y\Sigma ab + \Sigma ac)^2 - \Sigma a^2\,(y^2\Sigma b^2 + 2y\Sigma bc + \Sigma c^2 - z) \geq 0.$

Le coefficient de y^2 dans cette inégalité est

$$(\Sigma ab)^2 - \Sigma a^2\,\Sigma b^2$$

* Voyez : *Questions posées aux examens oraux de Paris, pour l'École polytechnique.* — 1re année du Journal, page 72, questions 18 et 23.

ou, comme on le voit sans peine,

$$- \Sigma (a_p b_q - a_q b_p)^2,$$

le signe Σ, s'appliquant à toutes les valeurs des indices p, q, prises dans la suite 1, 2,. . . n. Puisque le coefficient de y^2, dans (2), est une quantité *essentiellement négative*, si l'équation

$$(3) \quad (y \Sigma ab + \Sigma ac)^2 - \Sigma a^2 (y^2 \Sigma b^2 + 2y\Sigma bc + \Sigma c^2 - z) = 0$$

avait ses racines imaginaires, le premier membre conserverait constamment le signe du coefficient de y^2, c'est-à-dire le signe —. Alors la relation (2) ne pourrait jamais avoir lieu et l'équation (1) aurait ses racines imaginaires. Écrivons donc que l'équation (3) ou l'équation

$$(4) \qquad y^2[(\Sigma ab)^2 - \Sigma a^2 \Sigma b^2] + 2y[\Sigma ab \Sigma ac - \Sigma a^2 \Sigma bc] + [(\Sigma ac)^2 - \Sigma a^2 \Sigma c^2 + z\Sigma a^2] = 0$$

a ses racines réelles, on aura

$$[\Sigma ab \Sigma ac - \Sigma a^2 \Sigma bc]^2 - [(\Sigma ab)^2 - \Sigma a^2 \Sigma b^2] [(\Sigma ac)^2 - \Sigma a^2 \Sigma c^2 + z\Sigma a^2] \geq 0$$

de laquelle on tire après l'avoir simplifiée et l'avoir divisée par la quantité *essentiellement positive* Σa^2,

$$z \leq \frac{\Sigma a^2 \Sigma b^2 \Sigma c^2 - \Sigma a^2 (\Sigma bc)^2 - \Sigma b^2 (\Sigma ac)^2 - \Sigma c^2 (\Sigma ab)^2 + 2 \Sigma ab \Sigma ac \Sigma bc}{\Sigma (a_p b_q - a_q b_p)^2}$$

Le minimum de z est donc égal au second membre de cette inégalité.

On peut remarquer que cette valeur de z n'est *jamais infinie*. En effet, il faudrait, pour qu'il en fût ainsi, que le dénominateur, $\Sigma(a_p b_q - a_q b_p)^2$ fût nul ; que l'on eût par conséquent,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

Mais alors on poserait

$$a_1 x + b_1 y = u$$

et l'on aurait

$$a_1 x + b_2 y = \lambda_2 u$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n x + b_n y = \lambda_{n-1} u$$

$\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$ étant des *coefficients constants*. L'équation proposée (1), ne renfermerait plus qu'une variable indépendante u, *au second degré*, et l'on retomberait dans le cas

ordinaire, celui où l'on discute les variations d'un trinôme du second degré *renfermant une seule variable indépendante.*

Quant aux valeurs d'x et d'y qui font acquérir à z la valeur minimum que nous avons trouvée, on les détermine par les remarques suivantes.

La valeur minimum de z, étant substituée à la lettre z, dans l'inégalité (2); le premier membre de cette inégalité devient un *carré parfait,* cette valeur de z rend égales, en effet, les racines de l'équation (4). Mais le premier terme de l'inégalité (2) étant, nous l'avons déjà remarqué,

$$-\quad y^2\Sigma(a_p b_q - a_q b_p)^2,$$

pour que la relation (2) subsiste, il faut que le premier membre soit *nul* et que par conséquent on prenne,

$$y = \frac{\Sigma ab\Sigma ac - \Sigma a^2\Sigma bc}{\Sigma(a_p b_q - a_q b_p)^2}$$

Enfin la valeur de x, est :

$$x = \frac{\Sigma ab\Sigma bc - \Sigma b^2\Sigma ac}{\Sigma(a_p b_q - a_p b_q)^2}$$

Elle se déduit des valeurs connues de y et de z, par l'égalité (1), égalité qui devient d'ailleurs pour les valeurs d'y et de z, un carré parfait. On peut aussi remarquer que la valeur de y peut se déduire, *évidemment*, de celle de x, par la simple permutation des lettres a et b.

G. de Longchamps.

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le **docteur Henri Suter**, de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon.

(*Suite*, voir page 137)

LA SCIENCE CHEZ LES GRECS.

Son importation. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie.

Simplicius nous fait connaître un autre géomètre de cette époque, qui s'est aussi occupé de la quadrature du cercle. Antiphon, contemporain de Socrate, chercha à résoudre ce

problème à l'aide du polygone régulier inscrit; on double sans cesse le nombre des côtés, et l'on arrive finalement à un polygone dont les côtés se confondent avec la circonférence du cercle. Mais déjà Aristote et d'autres philosophes attirèrent l'attention sur cette erreur que commettait Antiphon : en admettant un dernier polygone, il rejetait l'hypothèse qui lui servait de point de départ, à savoir la division de la courbe, ou bien le doublement des côtés, poussé à l'infini. Pourtant à Antiphon revient le mérite d'avoir le premier marché dans la bonne voie; il était réservé au grand Archimède de la parcourir sûrement et d'atteindre le but.

Jean Philoponos nous entretient des efforts tentés par le sophiste Bryson pour arriver à la solution du même problème. Ce dernier philosophe croyait qu'en doublant un nombre de fois convenable les nombres des côtés du polygone inscrit et du polygone circonscrit, on devait arriver, en dernier lieu, à deux figures dont le cercle serait une moyenne arithmétique.

Il en fut de même des géomètres les plus remarquables et de leurs travaux depuis Pythagore jusqu'à Platon. Il ne nous reste plus qu'à jeter un coup d'œil rapide sur les leçons d'astronomie et de philosophie naturelle de l'école italique.

L'essence intime de la philosophie pythagoricienne devait exciter à une étude approfondie des merveilles de la voûte céleste. Sa tendance mystérieuse à l'observation abstraite des choses exerçait aussi une grande influence pour l'explication des phénomènes de la nature. Ainsi, comme nous l'avons vu, les pythagoriciens ont raccordé les intervalles de l'échelle musicale avec les distances des sphères célestes; ils ont, de cette manière, comparé les éléments du monde physique aux formes des corps réguliers; et essayé d'appliquer les rapports de nombre et de forme aux lois de la nature. Leur croyance au surnaturel et le dédain qui en découle pour tout ce qui est réel sur la terre et parmi ses habitants, ne pouvait se concilier avec les anciennes vues sur le mouvement et la distribution des corps célestes. Aussi établirent-ils un nouveau système du monde qui assignait à la terre une place plus modeste. Au lieu de la placer au centre de l'univers, et

de faire mouvoir tous les autres corps célestes autour d'elle, ils admirent l'existence d'un feu central autour duquel la lune, la terre, le soleil, les planètes et les étoiles se mouvaient dans des sphères concentriques et harmoniques. C'est donc aux pythagoriciens que revient la gloire d'avoir enseigné, les premiers, le mouvement de la terre. *Philolaüs* de Crotone, d'après Diogène Laërte et suivant d'autres témoignages, est le premier qui défendit cette nouvelle doctrine pythagoricienne dans ses écrits; après lui vinrent *Archytas* de Tarente, et plus tard *Aristarque* de Samos.

Le mouvement de la terre autour de son axe fut aussi enseigné par les pythagoriciens et défendu plus tard par *Héraclide* de Pont, disciple de Platon et d'Aristote; *Hiketas* de Syracuse fut aussi un de ses soutiens. Quoique cette théorie ne résultât nullement de l'observation exacte des phénomènes et surtout du mouvement irrégulier si frappant des planètes, et qu'elle provînt de l'influence indirecte de spéculations philosophiques, elle n'en restera pas moins, comme étant la première connaissance de la vérité qui, méconnue pendant environ deux mille ans, fut élevée à la hauteur d'une connaissance durable par le génie de Copernic.

Du reste dans l'antiquité, ces théories pythagoriciennes ne manquèrent pas de produire leur heureuse influence. A la place du feu central chimérique, une conception saine admit le soleil. On donna à celui-ci un nouveau mouvement autour d'un autre centre; on regardait les étoiles fixes comme des centres de systèmes solaires; et par là on enseignait déjà la pluralité des mondes. Le partisan le plus connu du vrai système fut *Aristarque* de Samos, dont les travaux scientifiques seront examinés plus loin; il fut aussi, il est vrai, son dernier défenseur. Devant la pénétration d'esprit d'un Hipparque et d'un Ptolémée, toute autre opinion disparaissait; et cette théorie réglementa le système du monde jusqu'à Copernic, sans rencontrer aucune opposition.

Si l'on étudie le développement de l'astronomie dans les écoles ionienne et pythagoricienne, on n'observe aucun progrès saillant. Les efforts des savants se concentraient principalement sur l'explication philosophique des phénomènes,

sur l'établissement de théories systématiquement déterminées. Le but pratique, utile de l'astronomie fut sacrifié à de vaines spéculations. La science ne pouvait pas se mouvoir librement sous la pression d'idées et de recherches philosophiques confuses. Ce ne fut qu'au milieu du ve siècle avant J.-C., alors que le besoin de régler et de mesurer le temps se fit sentir, que la manière de traiter l'astronomie prit une autre direction.

Les Grecs, dans les temps reculés, ainsi que les Juifs et les Arabes règlaient le temps sur le cours de la Lune; c'est-à-dire qu'ils l'exprimaient en mois lunaires. Ils cherchaient, il est vrai, de temps à autre, à mettre leurs résultats en accord avec la marche du Soleil. Deux mois qu'ils donnèrent d'abord en complément à ceux qui composaient l'année, ne suffirent pas; on formait ainsi, en accordant à l'année douze lunaisons, une période de deux ans; entre une période et la suivante, ils intercalaient un mois. Mais le besoin de corrections se faisait d'autant plus sentir que l'évaluation des durées de révolution du soleil et de la lune était plus exacte. Vers l'an 600 avant J.-C., Solon évalua l'année alternativement douze mois pleins et douze mois vides; les premiers avaient 30 jours; les autres, 29. Pour faire concorder cette année, qui n'avait que 354 jours, avec l'année solaire, on choisit une période de huit ans durant laquelle on intercala trois fois un mois plein; dans la 3e, la 5e et la 8e année. On obtenait ainsi 2,922 jours pour 99 mois; de sorte que l'année était de 365 jours et un quart, et le mois de 29 jours et demi. L'erreur était d'environ d'un jour et demi pour chaque période de 8 ans. En s'accumulant de période en période, ces erreurs ne tardèrent pas à se faire sentir. En 433 avant J.-C., les astronomes *Meton* et *Euktemon* instituèrent le cycle de *Meton*. Ce cycle se composait de 19 ans dont 12 ne contenaient que 12 mois, tandis que les 7 autres eurent 13 mois; ce qui faisait un total de 235 mois parmi lesquels 125 mois pleins et 110 mois vides. Les sept années intercalaires, qui comprenaient 13 mois, occupaient dans le cycle de 19 ans, les rangs 3, 6, 8, 11, 14, 17 et 19. Ces 19 années ou 235 mois formaient 6,940 jours, c'est-à-dire environ 10 heures

de plus que 19 années solaires et 8 heures de plus que 235 révolutions lunaires. Nous voyons par là que, dans cette période, la différence entre la course du soleil et celle de la lune n'est que de deux heures, tandis que la différence entre l'année solaire exacte et le cycle de Meton s'élève à environ un jour en 48 ans. L'astronome *Calippe* essaya de remédier à cette erreur commise dans la mesure du temps, en introduisant une période qui porte son nom et qui s'élevait à 76 ans, c'est-à-dire était quadruple de la précédente ($76 = 19 \times 4$). Sa période écoulée, Calippe supprimait un jour, car pendant cette durée, l'erreur sur les révolutions lunaires s'élevait à un jour. Cette méthode de Calippe amenait en ce qui concerne la lune, une erreur d'un jour en 304 ans; et, en ce qui concerne le soleil, un jour en 152 ans.

Cette manière de compter le temps qui, comme nous le voyons, se rapportait plus à la marche de la lune qu'à celle du soleil, resta en vigueur jusqu'à Jules César; celui-ci introduit la réforme Julienne et donna de l'autorité à la méthode égyptienne qui réglait l'année sur la marche du soleil. — Nous trouvons à l'avoir de Meton et Euktemon la première observation d'un phénomène astronomique : du solstice d'été de l'an 432 avant J.-C. Ce fait nous est rapporté par Ptolémée dans son *Almageste* où ces deux astronomes sont encore cités avec éloge en plusieurs autres circonstances.

Nous devons encore mentionner quelques philosophes de l'école pythagoricienne dont les théories méritent d'être examinées. *Empédocle* d'Agrigente en Sicile, qui vivait au commencement du ve siècle avant J.-C., a composé différents écrits mathématiques dont les plus importants ont trait à la physique. Aristote en cite de nombreux passages. Ses théories souvent obscures, pleines de mystères, écrites en vers, ont fourni aux savants anciens et modernes un vaste champ à des conceptions bizarres. Ainsi, dans sa théorie basée sur l'attraction et la répulsion des corps ou, comme Empédocle les appelle, l'amitié et la discorde des éléments, quelques-uns crurent trouver la force de la pesanteur et la force centrifuge; et ils attribuent à Empédocle la connaissance des causes du mouvement des corps célestes. On ne

conçoit pas qu'on ait pu donner une pareille extension aux idées d'Empédocle, lorsqu'on examine les vers qu'il a composés pour expliquer son tableau, et qui renferment clairement toute sa pensée. Sa théorie n'est, à vrai dire, que celle que l'antiquité a généralement admise et qui a été soutenue principalement par Aristote; elle concentre au centre du monde tout ce qui est lourd et projette vers la circonférence tout ce qui est léger. Elle enseigne que la terre et l'eau s'aiment d'une affection réciproque; que la terre et le feu se haïssent, etc.

On chercha aussi à baser, mais avec aussi peu d'exactitude, le grand principe de la mécanique céleste sur les spéculations d'un certain Timée de Locres; celles-ci nous ont été transmises par Platon, dans son dialogue qui porte le même nom : *le Timée.*

Nous arrivons à l'un des plus célèbres philosophes de la Grèce, *Démocrite* d'Abdère. Diogène Laërte nous cite divers écrits de ce philosophe; ils ont pour objet la géométrie. Mais, comme nous n'en connaissons que les titres, nous ne pouvons juger de leur mérite. Il traita du contact des cercles et de celui des sphères, des lignes irrationnelles et des corps réguliers. La Perspective et l'Optique lui doivent quelques découvertes. Plus célèbre est la *théorie des atômes* développée par lui et par son prédécesseur *Leucippe.* Elle n'eut pas beaucoup d'adhérents dans l'antiquité; mais elle mit en face du spiritualisme pythagorico-platonicien, ce matérialisme qui était encore peu puissant à cette époque, et qui dernièrement s'est relevé avec une puissance irrésistible. D'après cette théorie, le monde entier se compose de la réunion de particules élémentaires, indivisibles, infiniment petites qui, par leur assemblage et leurs mouvements, forment tous les corps de la nature. Il déduit de là le mouvement des planètes et des autres corps célestes; ce système nous a été conservé par Lucrèce dans son livre « *De rerum naturâ* ». L'âme de l'homme est aussi d'une nature matérielle; ainsi que le corps, elle se résout, par la mort, en atômes indestructibles. — Quelques autres théories physiques remarquables proviennent aussi de Démocrite.

Ainsi il enseigna que tous les corps tomberaient avec la même rapidité dans le vide, lorsqu'il dit : (*Lucrèce*, livre II, 238) :

> Omnia quapropter debent per inane quietum
> Æque ponderibus non æquis concita ferri.

Plus loin, il dit que, un poids plus léger avec un volume plus grand provient d'un plus grand nombre d'espaces vides (pores) (livre I, 364) :

> Ergo quod magnum est æque, leviusque videtur.
> Nimirum, plus esse sibi declarat inanis, etc.

Il soutient que la lumière est due à l'émission de petits corpuscules que l'objet éclairant fait rayonner autour et loin de lui (livre V, 281-305) :

> Sic igitur solem lunam stellasque putandum est
> Ex alio atque alio lucem jactare sub ortu
> Et primum quicquid flammarum perdere semper;
> Inviolabilia hæc ne credas forte vigere.

Toutes ces propositions sont encore aujourd'hui regardées comme vraies en partie, et comptaient naguère des hommes célèbres parmi leurs défenseurs. — Les épicuriens et aussi les stoïciens qui pourtant étaient si profondément divisés sur les préceptes de la conduite et de la vie humaine, ont adopté la plupart des enseignements de Démocrite, et surtout sa théorie atomique. Celle-ci perdit toutefois, chez ces sectes qui s'occupèrent plus spécialement du côté éthique de la philosophie, la signification vraiment scientifique que son fondateur lui avait donnée; elle ne pouvait par conséquent pas constituer une opposition puissante à la philosophie naturelle d'Aristote qui régnait alors. — Parmi tous les philosophes de l'antiquité, c'est à Démocrite que revient la gloire d'avoir formulé les conceptions les plus claires sur l'essence des phénomènes de la nature, et d'avoir posé un système servant de base aux études physiques et permettant aux plus grands chercheurs d'aujourd'hui d'établir leurs inventions et leurs théories ingénieuses : ce système est le matérialisme *.

(A Suivre.)

---

* Il faut entendre l'ensemble des lois qui régissent la matière.

CONCOURS DE L'ÉCOLE NAVALE, 1878

Composition d'arithmétique et géométrie.

1° Exposer la théorie des fractions périodiques sur les fractions $\frac{1}{111}$ et $\frac{43}{111}$.

2° Démontrer que les fractions périodiques engendrées par des fractions irréductibles de même dénominateur ont le même nombre de chiffres à la période.

On prendra pour exemple $\frac{1}{111}$ et $\frac{43}{111}$.

Démontrer que le volume engendré par un segment circulaire est $\frac{1}{6}\pi d^2h$, d étant la corde de l'arc et h sa projection sur le diamètre autour duquel a lieu la rotation.

Comme application inscrire dans une sphère un cône droit tel que son volume soit la moitié du segment sphérique dans lequel il est inscrit.

Tracé graphique.

Un point situé dans le premier dièdre est distant de $0^m,05$ du plan horizontal et de $0^m,045$ du plan vertical. Ce point est le centre d'un hexagone régulier dont le plan est parallèle au plan horizontal et dont l'un des côtés parallèle au plan vertical a $0^m,03$ de longueur.

Cet hexagone est la base commune de 2 pyramides régulières dont l'une a son sommet dans le plan horizontal et dont l'autre a le sien à une distance de $0^m,07$ de ce plan.

On demande de construire l'ombre de ces pyramides sur les plans de projection, sachant qu'il existe dans le premier dièdre une source lumineuse qui envoie des rayons parallèles à une droite faisant un angle de 19° avec le plan horizontal et de 33° avec le plan vertical.

Algèbre et Trigonométrie.

Trouver le maximum et le minimum de la fonction

$$y = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 - 5x + 4}$$

Étudier les variations pour les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$

Résoudre le triangle ABC connaissant

$$a = 3875^m,475$$
$$b = 4637^m,395$$
$$c = 6143^m,877$$

et déterminer la surface en hectares.

CONCOURS ACADÉMIQUES DE 1878

AIX.

1re question. — On donne deux points fixes A et O. Par le point O, on mène une droite BC, sur laquelle on prend deux points B et C tels que le rapport $\frac{OB}{OC}$ soit égal à un rapport donné $\frac{p}{q}$ et que l'angle BAC soit égal à un angle donné α. On demande le lieu géométrique des points B et C lorsque la droite BC tourne autour du point O.

2e question. — Trouver les valeurs de x et de y comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ qui vérifient les deux équations suivantes :

$$\sin x = \cos 2y$$
$$\sin 2x = \cos y$$

(Math. élém.)

BESANÇON ET NANCY.

On considère un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle O, et dont l'angle B est droit. Sur chaque côté comme diamètre on décrit une circonférence. Les quatre circonférences ainsi obtenues se coupent consécutivement en quatre points A′, B′, C′, D′, différents des sommets A, B, C, D. En joignant ces points deux à deux, on forme le quadrilatère A′B′C′D′. Les données sont : le rayon R du cercle O, l'angle B qui est droit, et les angles β = BAC, δ = DAC que font respectivement les côtés AB et AD du quadrilatère ABCD avec la diagonale AC.

1° Etablir les propriétés du quadrilatère A′B′C′D′, et calculer ses angles, ses côtés, ses diagonales, sa surface, ainsi que les distances de ses sommets aux différents côtés du quadrilatère ABCD;

2° Laissant fixe le cercle donné et le sommet A, on fait varier les angles β et δ de façon que la bissectrice de l'angle A reste fixe. Trouver le lieu géométrique des sommets du quadrilatère A′B′C′D′ ;

3° Si on traite le quadrilatère A′B′C′D′ comme le quadrilatère ABCD en décrivant une circonférence sur chacun de ses côtés, on en déduira un nouveau quadrilatère A″B″C″D″ qui, traité comme le précédent, conduira lui-même à un quadrilatère A‴B‴C‴D‴, etc... On suppose que la même opération soit répétée indéfiniment, et on demande de calculer la limite vers laquelle tend la somme S′ + S″ + S‴ + ... des surfaces des quadrilatères obtenus, ou plutôt le rapport de cette limite à la surface S du quadrilatère donné.

(Math. élém.)

BORDEAUX.

1. — Énoncer dans leur ordre et sans donner les démonstrations, *toutes* les propositions que l'on doit successivement démontrer pour passer de la mesure du volume du parallélipipède rectangle à celle du prisme quelconque. — Indiquer brièvement les diverses marches que l'on peut suivre.

2. — Expression du rapport d'une aire plane à sa projection sur un plan faisant avec le plan de l'aire un angle donné. Déduire cette expression de la mesure du prisme oblique, et, en suivant la marche inverse, établir cette expression directement, et l'appliquer à la recherche du volume du prisme oblique.

3. — Calculer et construire les côtés d'un triangle rectangle connaissant les rayons des cercles inscrits dans les deux triangles dans lesquels le triangle cherché est décomposé par la droite menée du sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse. *(Math. élém.)*

Enseignement spécial.

1re Question.—Tracer les projections d'une pyramide ayant pour base un triangle équilatéral situé d'une manière quelconque dans le plan BLH et une hauteur double du côté de la base.

On déterminera l'ombre au flambeau de la pyramide sur le plan horizontal.

2e Question. — Soit O un point quelconque pris dans le plan du triangle ABC, soient E, F, G les milieux des côtés. Démontrer que le système des forces OA, OB, OC est équivalent au système des forces OE, OG, OF.

3e Question. — Soit ABC un plan incliné de 30° sur l'horizon ; on propose de déterminer les points M et N de telle manière que la longueur MN supposée égale à AB soit parcourue par un point pesant parti sans vitesse du point A dans le même temps que la hauteur AB serait parcourue par un autre point pesant tombant librement de A.

CAEN.

1. — Déterminer les côtés d'un trapèze isoscèle connaissant la hauteur du trapèze, sa surface et le volume qu'il engendre en tournant autour d'un de ses côtés non parallèles. — Discuter la solution et chercher le maximum et le minimum du volume engendré quand on donne la surface du trapèze égale à celle du carré construit sur la hauteur.

2. — Par un point P donné, on mène une droite qui coupe un cercle donné en 2 points A et B. On imagine 2 cercles qui passent tous deux en P et touchent le cercle donné l'un au point A, l'autre au point B. Ces 2 cercles ont, outre le point P, un second point commun dont on demande le lieu quand la sécante PAB tourne autour de P.

CLERMONT.

Etant donnés un triangle ABC et un point D sur le côté BC, tracer une parallèle EF à BC telle que le segment EF, intercepté dans l'angle A, soit vu du point D sous un angle droit. — Discussion. *(Math. élém.)*

On donne une ellipse et un point fixe P dans son plan. Par le point P on mène une sécante qui rencontre l'ellipse en H et K et en M la bissectrice de l'angle HOK (O étant le centre de l'ellipse).

1° Lieu du point M.

2° Déterminer les tangentes parallèles à la droite OP.

3° Montrer les formes principales de la courbe dans le cas où le point P se meut sur la perpendiculaire élevée à l'extrémité du grand axe de l'ellipse.

4° Dire pourquoi lorsque le point P est à une certaine distance du grand axe et la sécante PHK parallèle à cet axe, le point M est indéterminé.

Physique.

Décrire les méthodes employées pour trouver expérimentalement le coefficient de dilatation linéaire des corps solides.

Relation qui existe entre le coefficient de dilatation linéaire et le coefficient de dilatation cubique. (*Math. spéc.*)

Géométrie descriptive.

On donne un tétraèdre irrégulier, solide, homogène, soumis à la pesanteur. — On demande de retourner ce tétraèdre et de le mettre en équilibre sur le même plan horizontal en le faisant reposer par le sommet opposé à cette face.

Mathématiques appliquées.

De tous les cônes ayant même génératrice quel est celui qui a le plus grand volume? (*Enseig. spécial.*)

DIJON

Dans un triangle quelconque ABC, la bissectrice de l'angle A rencontre le côté opposé BC au point D et se trouve partagée en deux segments OA et OD par le centre O du cercle inscrit. On donne le rayon r de ce cercle et les segments $OA = \alpha$, $OD = \delta$; on propose de déterminer en fonction de r, α et δ : 1° la surface δ du triangle ABC; 2° le rayon R de celui des cercles exinscrits à ce triangle qui a son centre sur le prolongement de la bissectrice AD; 3° le volume V du cône circulaire droit qui aurait pour base le cercle de rayon R et pour hauteur la bissectrice AD. Enfin on demande : 4° la valeur de α qui rend minimum le volume V lorsqu'on suppose r et δ constants mais α variable.

(*Math. élém.*)

DOUAI.

1re question. — Une barre ABC posée sur un sol horizontal est limitée latéralement et en haut par la surface que décrit un arc de parabole AMB en tournant autour de l'axe vertical OA de la parabole. Cela posé, après avoir construit le triangle ABC isoscèle, qui a même hauteur AO que le volume considéré : 1° on mène un plan horizontal quelconque coupant le volume suivant le cercle MN et le triangle suivant une droite PQ; trouver le *rapport de l'aire de la première de ces sections à la* LONGUEUR *de la 2e*; 2° on demande le volume de la borne ABC, soit en fonction de sa base et de sa

hauteur, soit en fonction de sa hauteur et du paramètre p de la parabole génératrice; 3° déterminer le centre de gravité de la borne supposée homogène.

2° *question.* — Sur la surface convexe d'un cylindre circulaire en bois ayant 0m,01 de hauteur et un rayon beaucoup plus grand R, on euroule une bande de caoutchouc de 0m,01 de largeur et dont la tension partout la même est de t kilogrammes; cette bande de caoutchouc fait juste le tour du cylindre. On demande :

1° Quelle pression totale exercent l'une sur l'autre, par l'effet de cette tension à travers un plan diamétral ABCD, les deux moitiés correspondantes du cylindre;

2° Quelle pression est exercée par chaque centimètre PP'QQ' de caoutchouc sur la surface sous-jacente du cylindre (on admettra, ce qui a lieu, que cette pression se transmet partout intégralement dans les sens parallèles aux bases).

Enseignement spécial.

Un corps est limité par une surface plane verticale ABCD, par une arête EF également verticale et par une surface courbe qu'engendre une horizontale s'appuyant constamment sur le contour ABCD et sur la droite EF. On demande 1° d'évaluer le volume de ce corps en le décomposant en tranches minces par des plans perpendiculaires à une droite fixe;

2° De déterminer le centre de gravité de la section plane A'B'C'D' parallèle à la face ABCD, étant donné le centre de gravité de cette face par rapport à un axe vertical BD.

3° De déterminer dans la même hypothèse simplificative le centre de gravité général du volume.

Construire les projections de la circonférence qui passe par les trois points A, B, C, pris sur la surface d'une sphère. Le centre de la sphère est à 10 centimètres de chaque plan de projection, et son rayon est de 8 centimètres. Les trois points, A, B, C, sont situés sur la partie supérieure de la sphère; les projections horizontales des rayons menés à ces points ont pour longueurs respectives $Oa = 4$ centimètres, $Ob = 6$ centimètres, $Oc = 7$ centimètres, et les angles que font ces projections avec la ligne de terre sont respectivement de 30°, 75°, 120°.

GRENOBLE

1° Résoudre un triangle dont on donne un angle A, le rayon r du cercle inscrit, et le rayon R du cercle circonscrit. Chercher entre quelles limites doit varier l'angle A pour que le problème soit possible; et enfin construire le triangle.

2° Démontrer que tout plan passant par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre divise ce tétraèdre en deux parties équivalentes.

PARIS

Dans un quadrilatère convexe ABCD on trace la droite qui joint les milieux des diagonales. On prend un point M q.q. sur cette ligne dans l'intérieur du quadrilatère, et on joint ce point aux quatre sommets A, B, C et D.

Démontrer que le sommet des deux triangles MAB, MCD qui ont pour sommet commun le point M et pour bases deux côtés opposés AC, CD du quadrilatère, est équivalente à la moitié du quadrilatère.

2° Comment faudrait-il modifier l'énoncé du théorème si le point M était extérieur au quadrilatère tout en restant sur la ligne qui joint les milieux des diagonales.

3° Faire voir que les points de cette ligne sont les seuls qui jouissent des propriétés précédentes.

4° Déduire de ces théorèmes que dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, le centre du cercle et les milieux des diagonales sont trois points en ligne droite.

(*Math. élém.*)

POITIERS

Mathématiques élémentaires

Deux circonférences O, O′ ont une corde commune BC. On joint un point quelconque A de la circonférence aux deux points B et C. Les droites AB, AC prolongées rencontrent la circonférence O′ en deux points B′ et C′. On demande :

1° L'angle que fait le rayon OA avec la corde B′C′;

2° Le lieu géométrique des points de rencontre d'une perpendiculaire à B′C′ menée par le centre O′ avec les bissectrices intérieures et extérieures de l'angle BAC.

Enseignement spécial

Deux poulies dont les axes sont parallèles et horizontaux se composent de cylindres de rayons r et r' et de grandes roues de rayons R et R′; des poids P et P′ sont suspendus à des cordons qui s'enroulent en sens inverse sur les cylindres. Sur les grandes roues une corde s'enroule en sens inverse sur chacune d'elles et en passant sur une poulie fixe C. Trouver le cas d'équilibre du système. Examiner le cas où :

1° Les rayons des cylindres r et r' seraient égaux;

2° Les rayons des grandes roues R et R′ seraient égaux.

Trouver les projections d'un groupe composé :

1° D'un prisme droit dont la base inférieure est un triangle équilatéral situé dans le plan horizontal de projection;

2° D'un tétraèdre dont la base a été obtenue en joignant les milieux des côtés de la base supérieure du prisme, le sommet de ce tétraèdre étant situé au-dessus de la base inférieure du prisme :

L'un des sommets de la base inférieure est situé sur la ligne de terre et l'un des côtés aboutissant à ce sommet fait un angle de 30° avec la ligne de terre.

Ombre portée par ces deux corps sur les plans de projection; les rayons lumineux étant inclinés à 45° sur les deux plans de projection.

Le côté de la base du prisme vaut $0^m,06$.

La hauteur du prisme est $0^m,27$.

RENNES

Dans une circonférence donnée O, on inscrit un triangle donné quelconque ABC, qu'on suppose décrit dans le sens ABC. Parallèlement à ses côtés et dans leurs sens respectifs, on trace les rayons OA_1, OB_1, OC_1, et l'on forme le triangle $A_1B_1C_1$. On agit sur le deuxième triangle comme sur le premier, et ainsi de suite indéfiniment. On demande :

1° Vers quelle forme tendent ces triangles ;

2° S'il y a des lignes déterminées dont s'approchent indéfiniment les côtés et, lorsqu'il y en a, de les faire connaître;

3° Si, en remontant par l'opération inverse la série des triangles $A_1B_1C_1$, ABC, $A_{-1}B_{-1}C_{-1}$, etc., où l'on regarde toujours les éléments de ABC comme donnés, l'opération pourra se poursuivre indéfiniment et, si l'on doit s'arrêter, pour quel rang cette circonstance se présentera.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

ACADÉMIE DE RENNES.

Session de juillet 1877.

On donne un cerle de rayon R et un point A situé à la distance $OA = a$ du centre O ; on joint le point A à un point M de la circonférence par la ligne AM faisant avec AO un angle $MAO = \omega$. En écrivant l'expression du carré du côté OM dans le triangle OMA, on obtient une équation qui permet de calculer $AM = x$ au moyen de a et de ω. Discuter cette équation. Interprétation de la deuxième racine. Valeur limite de AM lorsqu'on donne à l'angle ω toutes les valeurs possibles.

Résoudre le système
$$mxy - x^2 - y^2 = 1$$
$$m(ay + bx) - 2(ax + by) = 0$$
dans lequel les quantités a et b sont données par la relation
$$mab - a^2 - b^2 = 0$$

Quel rayon faut-il donner à une circonférence pour que le segment AmB qui répond à l'angle au centre de 100° 26′ 36″ ait une surface de $3^{mq},2566$.

Session de novembre 1877.

Résoudre et discuter l'équation
$$2 \sin 3x - 3 \sin 2x = m \sin x$$

ACADÉMIE DE CLERMONT-FERRAND

Session d'avril

1° Étudier les variations de la fraction
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x}$$

2° Volume du tronc de pyramide. Étudier les variations du périmètre et de la surface d'un triangle rectangle dont on connaît la somme de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante.

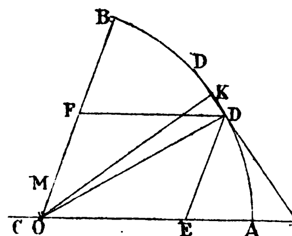
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 94.

Solution par M. DALZON, élève mineur, pensionnat Saint-Louis à Saint-Étienne.

On donne un secteur circulaire et l'on demande sur l'arc AB *un point* D *tel qu'en menant des parallèles aux rayons, on forme un parallélogramme de périmètre donné.* (Thual).

Supposons le problème résolu et soit OEDF le parallélogramme de périmètre donné $2p$.



Prenons EH = ED; on a OE + EH = OH = OE + DE = p de plus DHO $= \frac{1}{2}$ $\widehat{BOG}$. OD est le rayon du secteur.

Le triangle ODH dans lequel on connaît un angle, l'un des côtés adjacents et le côté opposé peut être construit. En effet on prendra OAH $= p$ par le point H on mènera une parallèle à OM bissectrice de BOG. Cette parallèle fournira au moins une solution pourvu que l'on ait OH $\leq$ OA. Si α désigne l'angle BOA et R le rayon, on devra avoir

$$p \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \leq R$$

ou

$$p \cos \frac{\alpha}{2} \leq R$$

ou encore

$$\cos \frac{\alpha}{2} \leq \frac{R}{p}$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $\cos \frac{\alpha}{2} > \frac{R}{p}$, il n'y a pas de solution.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Boucher (Maurice), Lamy, Leblanc, Marcelin, de Cherbourg; Montenot, de Troyes; Demortain, de Doullens; Vautré, de Saint-Dié; Cordeau, Simon, école Lavoisier; Cottereau, de Châteauroux; Belin, de Semur; Lefèvre, au lycée Louis-le-Grand; Perrin, de Clermont-Ferrand; J. B., à Charlemagne; Menand, à Dijon.

QUESTION 95.

Solution par M. Mirjolet, élève au Collége de Longwy.

Pour trouver le plus grand commun diviseur entre A *et* a, *on peut s'y prendre de la manière suivante : on multiplie* A *par la suite des nombres* 1, 2, 3......a *et on cherche combien on obtient ainsi de nombres divisibles par* a, *leur nombre est le plus grand commun diviseur cherché.*

Soit Δ ce plus grand commun diviseur et q et q' les quotients de A et de a par Δ, on a évidemment

$$\frac{A}{a} = \frac{q}{q'}$$

et

$$\frac{nA}{a} = \frac{nq}{q'}$$

n étant un des nombres $1, 2, 3 \ldots\ldots. a$.

Par suite nA sera divisible par a quand nq le sera par q' et réciproquement; il y aura donc autant de multiples de a dans la suite (1) A, 2A.......aA, qu'il y aura de multiples de q' dans la suite $q, 2q \ldots\ldots. aq$ (2).

Or q et q' étant premiers entre eux, si q' divise nq, l'un quelconque des termes de cette suite, il doit diviser n; il y a donc autant de multiples de q' dans la suite (2) et par conséquent de multiples de a dans la suite (1) qu'il y a de multiples de q' dans la suite (3) $1, 2, 3 \ldots\ldots. a$. Mais puisque $a = \Delta q'$, il est facile de voir que les multiples de q' contenus dans la suite (3) sont $q', 2q' \ldots\ldots. \Delta q'$. Donc leur nombre est Δ; c. q. f. d.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Vautré, de Saint-Dié; Demortain, de Doullens; Cottereau, à Chateauroux; Reuss, à Belfort.

QUESTION 96.

Solution par M. MALESSET, élève du lycée de Poitiers.

Le nombre p *étant premier avec* 10, *montrer qu'on peut toujours trouver un multiple de* p *terminé par des chiffres pris arbitrairement.*

p étant premier avec 10 est premier avec toutes les puissances de 10. Supposons que l'on veuille un multiple de p terminé par trois chiffres quelconques.

On peut représenter que des nombres sont premiers par l'expression

$$mA + nB = 1,$$

m ou n étant négatif.

Ici, par exemple, nous aurons

$$mp - n \cdot 10^3 = 1.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par un nombre α terminé par trois chiffres quelconques, on aura

$$m \cdot \alpha p = \alpha\,(1 + n \cdot 1000).$$

Le nombre entre parenthèses sera terminé par les trois chiffres 001.

Il est évident que ce nombre étant multiplié par α le résultat sera terminé par les trois chiffres qui terminent α.

Remarque. — Si l'on voulait quatre chiffres, on prendrait p premier avec 10^4.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Dalzon, de Saint-Etienne, J.-B., du lycée Charlemagne; Cordeau, école Lavoisier; d'Ocagne, collége Chaptal; Bernaou, d'Epernay.

QUESTION 97.

Solution par M. HUET, élève du lycée d'Orléans.

Construire un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois parallèles données.

On peut prendre arbitrairement sur l'une des parallèles un des sommets du triangle. Par exemple C sur RS.

Supposons le problème résolu et soit ABC le triangle cherché. Au point C sur RS élevons CE perpendiculaire et construisons le triangle équilatéral CED. Joignons le point D au point B. Les triangles DBC et ACE sont semblables.

En effet, ils ont deux côtés proportionnels comprenant un angle égal; ECA = DCB, puisque ces angles sont égaux chacun à un angle d'un triangle équilatéral, diminué de ACD. On a donc CDB = CEA : mais CEA est droit, donc DB est perpendiculaire en D à CD.

Pour construire le triangle ABC il suffit d'élever en un point quelconque C de la parallèle RS une perpendiculaire CE; et sur la longueur comprise entre les parallèles extrêmes on construit un triangle équilatéral. Il suffira dès lors d'élever au point D une perpendiculaire sur CD; sa rencontre avec la parallèle PQ sera un deuxième sommet du triangle. Le côté BC étant aussi connu de grandeur et de position, le triangle est déterminé.

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Gélinet, d'Orléans; Marcellin, Leblanc, de Cherbourg; Demortain, de Doullens; Delarue, lycée Fontanes, institution Marc-Dastès; Cordeau, école Lavoisier; Bertrand, de Toulouse; Ancion, Jottrand, Lambert, de Dinant (Belgique); Hoc, de Lonwy; Levi, de Nancy; Perrin, de Clermont-Ferrand; Menand, de Dijon; Hugentobler, de Boppelsen; Vautré, de Saint-Dié; Malesset, Choyer, de Poitiers; Tourrel, Moureton, à Tournon; Chancogne, Froidefond, à Périgueux; Charzat, à Melun; Robin, à Mont-de-Marsan; Guilloux, à Sainte-Barbe; Bruyand, à Troyes; Nessi, à Passy; Carnier, lycée Saint-Louis; Thual, à Lorient; Cottereau, à Châteauroux; d'Ocagne, collége Chaptal; Reuss, à Belfort.

QUESTION 98.

Solution par M. Jannat, de Mantes-sur-Seine.

Le volume d'un cône s'obtient en divisant le carré de la surface latérale par trois fois la circonférence de grand cercle de la sphère circonscrite.

Soient b le rayon du cercle formant la base du cône, h sa hauteur, a son apothème.

La surface latérale du cône est

$$S = \pi b \sqrt{b^2 + h^2}.$$

La circonférence de la sphère circonscrite est $C = \pi D$ en appelant D son diamètre. Or $D = \frac{b^2 + h^2}{h}$;

donc $$C = \pi \frac{b^2 + h^2}{h}.$$

On doit donc avoir $$V = \frac{S^2}{3C},$$

ou en remplaçant $V = \pi \dfrac{b^2h + h^3}{3 + \dfrac{3h^2}{b^2}} = \dfrac{1}{3} \pi b^2h,$

résultat qui est bien le volume du cône.

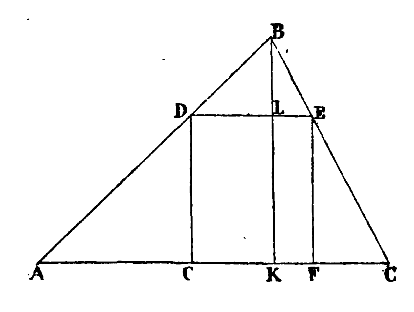
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Chersey, d'Ocagne, collége Chaptal; Souchet, d'Angers; Lerossay, Lambert, de Dinant; Leblanc, Marcellin, de Cherbourg; Demortain, de Doullens; Clerget, de Saint-Etienne; Cordeau, école Lavoisier; Chancogne, de Périgueux; Corbeau, de Saint-Quentin; Dupuis, de Grenoble; Leclerc, de Nancy; Perrin, de Clermont; J. B., à Charlemagne; Montenot, Franquet, Bruyand, à Troyes; Moret-Blanc, à Lons-le-Saulnier; Vautré, à Saint-Dié; Chellier, à Constantine; Hugentobler, à Boppelsen; Charzat, à Melun; Saunier, à Marseille; Guilloux, à Sainte-Barbe; Stegemann, Garnier, lycée Saint-Louis; Thual, à Lorient; Deville, à Perpignan; Biette, collége Stanislas; Martin, Reuss, à Belfort; Choyer, à Poitiers; Vitrai, à Angoulême; Traverse, à Mantes; Serrot, à Bordeaux.

QUESTION 99.

Solution par M. A. LAMBIOTTE, Athénée de Liége.

Dans un triangle se trouve inscrit un rectangle. Si B *et* H *désignent la base et la hauteur du triangle,* b *et* h *la base et la hauteur du rectangle, on a*

$$\frac{b}{B} + \frac{h}{H} = 1.$$



Soit ABC le triangle et DEFG le rectangle inscrit, soient en outre $BK = H$, $AC = B$; $DG = h$, $GF = b$. Les triangles semblables BKA et DGA donnent

$$\frac{h}{H} = \frac{AD}{AB}$$

de même les triangles semblables BAC et BDE donnent

$$\frac{b}{B} = \frac{BD}{AB}$$

Additionnant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{b}{B} + \frac{h}{H} = \frac{AD + BD}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Besson, Marcellin, de Cherbourg; Cuvellier, Lambert, de Dinant; Dupuis, de Grenoble; Isay, Leclerc, Giros, de Nancy; Gelinet, d'Orléans; Demortain, de Doullens; Dalzon, de Saint-Étienne; Baraton, de Sainte-Barbe; H. Dumont, école Belsonce, Marseille; Perrin, de Clermont-Ferrand; Chersey, collége Chaptal; Souchet, d'Angers; Cordeau, école Lavoisier; Chancogne, Froidefond, Pfeiffer, Faure, de Périgueux; J. B., à Charlemagne; Sommier, à Belley; Biette, collége Stanislas; Montenot, Franquet, Bruyand, à Troyes; Vitrac, à Angoulême; Moret-Blanc, à Lons-le-Saunier; Vautré, à Saint-Dié; Trokay, à Liége; Malesset, Choyer, à Poitiers; Hugentobler, à Boppelsen; Delieux, à Toulouse; Charzat, à Melun; Saunier, à Marseille; Lemoine, à Laon; Stegemann, Garnier, Lugol, lycée Saint-Louis; Robert, à Montluçon; Deville, à Perpignan; Jordan, à Montpellier; Laclette, à Pau; Martin, à Belfort; Lignon, à Moulins; Chrétien, au Havre; Traverse, à Nantes; Serrot, à Bordeaux.

QUESTION 100.

Solution par M. A. Sanson, élève du Collége Stanislas.

Lorsqu'on élève au carré le produit de deux nombres entiers consécutifs augmenté de 1, l'on obtient une somme de trois carrés. En général, le carré du trinôme $a^2 + ab + b^2$ *est la somme de trois carrés.*

Soient N et N + 1, deux nombres entiers consécutifs :

$$\begin{aligned}[N(N+1)+1]^2 = (N^2+N+1)^2 &= (N^4+2N^3+N^2) \\ &\quad + (N^2+2N+1) \\ &\quad + N^2 \\ &= (N^2+N)^2 + (N+1)^2 + N^2\end{aligned}$$

D'une manière plus générale

$$(a^2+ab+b^2)^2 = (a^4+2a^3b+a^2b^2) + (b^4+2b^3a+a^2b^2) + a^2b^2 = (a^2+ab)^2 + (b^2+ab)^2 + (ab)^2$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Besson, Canuet, Leblanc, Marcelin, Lamy, de Cherbourg; Chancogne, Faure, de Périgueux; Cordeau, école Lavoisier; Clerget, de Saint-Étienne; Cuvellier, Nestor, Lambert, Jottrand, de Dinant; d'Ocagne, Chersey, collége Chaptal; Perrin, de Clermont; Vitrac, d'Angoulême; Foucret, Cottereau, de Châteauroux; J. B., à

Charlemagne; Biette, collége Stanislas; Demortain, à Doullens; Moret-Blanc, à Lons-le-Saunier; Vautré, à Saint-Dié; Chellier, à Constantine; Choyer, à Poitiers; Saunier, à Marseille; de Montgolfier, Martincourt, Servignat, Bergier, à Passy; Stegemann, Garnier, lycée Saint-Louis; Thual, à Lorient; Robert, à Montluçon; Franquet, à Troyes; Reuss, à Belfort; Jordan, à Montpellier.

QUESTION 102.

Solution par M. Perbal, élève du Collége de Longwy.

Si l, m, n *sont les longueurs des bissectrices d'un triangle* ABC *dont la surface est* S, *démontrer que l'on a*

$$S = \frac{1}{2} l (b + c) \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} la \cos \frac{B - C}{2}$$
$$= \frac{lmn\,(b + c)\,(c + a)\,(a + b)}{4abc\,(a + b + c)}$$

1° En effet considérant le triangle ABC comme formé des triangles ADC et DAB et remarquant que

$$\text{surf. ADC} = \frac{1}{2}\, bl \sin \frac{A}{2}$$

$$\text{surf. BAD} = \frac{1}{2}\, cl \sin \frac{A}{2}$$

il vient par addition

$$\text{surf. ABC} = \frac{1}{2}\, l\,(b + c) \sin \frac{A}{2}$$

2° On a de même

$$\text{surf. ADC} = \frac{1}{2}\, l.\text{DC} \sin \text{ADC}$$

$$\text{surf. BAD} = \frac{1}{2}\, l.\text{BD} \sin \text{BDA}$$

et comme sin ADC = sin BAD (angles supplémentaires)
On a

$$\text{surf. ABC} = \frac{1}{2}\, al \sin \text{ADC} = \frac{1}{2}\, al \sin \left(B + \frac{A}{2}\right)$$

Or le sinus d'un arc étant égal au cosinus de son complément et comme $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90°$, on a

$$\sin\left(B + \frac{A}{2}\right) = \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - B - \frac{A}{2}\right)$$
$$= \cos\frac{B-C}{2}$$

par suite $\quad$ $\text{surf. ABC} = \frac{1}{2}\, al \cos\frac{B-C}{2}$

3° De même qu'on a trouvé

$$S = \frac{1}{2}\, l\,(b+c)\sin\frac{A}{2}$$

on trouverait $S = \frac{1}{2}\, m\,(c+a)\sin\frac{B}{2}$

$$S = \frac{1}{2}\, n(a+b)\sin\frac{C}{2}$$

multipliant ces égalités membre à membre, il vient

$$S^3 = \frac{1}{8}\, lmn(b+c)(c+a)(a+b)\,.\,\frac{S^2}{p\,.\,abc},$$

En remarquant que, dans un triangle, on a

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{S^2}{p\,.\,abc}.$$

Il vient après simplification :

$$S = \frac{lmn(b+c)(c+a)(a+b)}{4abc(a+b+c)}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Depallières, de Belley; Leclerc, de Nancy; Chersey, d'Ocagne, de Chaptal; Hoc, Mirjolet, Junck (A.), de Longwy; Menand, de Dijon; Montenot, Bruyand, de Troyes; Demortain. de Doullens; Lévi, Isay, de Nancy; Vautré, de Saint-Dié; Lamy, Leblanc, de Cherbourg; Hugentobler, de Boppelsen (Suisse); Thual, à Lorient; Charzat, à Melun; Rey, lycée Saint-Louis; Chastang, à Pau; Renevey et Gubiand, à Bourg; Reuss, à Belfort; Objois, Lignon, à Moulins; Vitrai, à Angoulême.

QUESTION 103.

Solution par M. MENAND, élève du lycée de Dijon.

Si A *et* A′ *sont deux puissances différentes d'un nombre premier* a, B *et* B′ *deux puissances différentes d'un nombre premier*

b, *et si les nombres* AB AB′ A′B A′B′ *ont respectivement* m, n, p, q *diviseurs, le nombre des diviseurs du nombre* abAB′BA′ *est* (m + n + p + q). (The Educational Times.)

Soient $A = a^{\alpha}$, $A' = a^{\beta}$

$B = b^{\gamma}$, $B' = b^{\delta}$

alors $AB = a^{\alpha}\ b^{\gamma}$ $AB' = a^{\alpha}\ b^{\beta}$

$A'B = a^{\beta}\ b^{\gamma}$ $A'B' = a^{\beta}\ b^{\delta}$

Le nombre des diviseurs de AB est $(\alpha + 1)(\gamma + 1)$

donc $(\alpha + 1)(\gamma + 1) = m$ (1)

de même $(\alpha + 1)(\delta + 1) = n$ (2)

$(\beta + 1)(\gamma + 1) = p$ (3)

$(\beta + 1)(\delta + 1) = q$ (4)

or $abAB'BA' = aba^{\alpha}\ b^{\delta}\ a^{\beta}\ b^{\gamma} = a^{\alpha+\beta+1} . b^{\gamma+\delta+1}$

Le nombre des diviseurs de $abAB'BA'$ est alors $(\alpha + \beta + 2)$ $(\gamma + \delta + 2)$. Additionnant (1) et (3) il vient

$$(\alpha + 1)(\gamma + 1) + (\beta + 1)(\gamma + 1) = m + p$$

ou $(\alpha + \beta + 2)(\gamma + 1) = m + p$ (5)

De même additionnant (2) et (4) on a

$(\alpha + \beta + 2)(\delta + 1) = n + q$ (6)

additionnant (5) et (6) on a

$$(\alpha + \beta + 2)(\gamma + \delta + 2) = n + m + p + q.$$

c. q. f. d,

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Perrin, de Clermont-Ferrand; Biette, collége Stanislas; Vautré, de Saint-Dié; Mirjolet, de Longwy; Chancogne, de Périgueux; Isay, de Nancy; Demortain, de Doullens; Lambert, de Dinant; Delarue et Duflot, lycée Fontanes; institution Marc-Dastès; d'Ocagne, à Chaptal; Saunier, à Marseille; Malesset, à Poitiers; Marcelin, à Cherbourg; Reuss, à Belfort; Vitrai, à Angoulême.

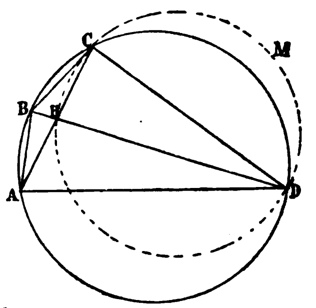
QUESTION 104.

Solution par M. Montenot, élève du Lycée de Troyes.

Si dans un quadrilatère inscrit ABCD *les deux côtés consécutifs* AB, BC *sont égaux et si la diagonale* BD *rencontre en* H *la diagonale* AC, *on a la relation*

$$AB^2 = BD \cdot BH$$

Par les points C, H, D faisons passer une circonférence; l'angle BCH a pour mesure



$$\frac{\text{arc CH}}{2},$$

car $BCH = CDB$ qui a pour mesure

$$\frac{\text{arc CH}}{2},$$

donc BC est tangente à cette circonférence et l'on a

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 = BD \;.\; BH.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Perrin, de Clermont-Ferrand; Hoc, Dumas, Junck, Perbal, Mirjolet, Fabing, Moreaux, de Longwy; Bertrand, Carton, Charlot, élèves du lycée Henri IV; Menand, de Dijon; Hugentobler, de Boppelsen (Suisse); Gelinet, Huet, d'Orléans; Cordeau, école Lavoisier; Biette, Bompard, collége Stanislas; Souchet, d'Angers; Corbeau, de Saint-Quentin; Demortain, de Doullens; Delieux, de Toulouse; Thomas, Coblyn, de Sainte-Barbe, Vautré; Sommier, à Belley; Levi, Isay, Leclerc, de Nancy; de Montgolfier, Nassi, à Passy; Ancion, Rulmier, Lambert, Jottrand, Carlier, Cuvelier, de Dinant; Ibach, école Belzunce, à Marseille; Pelus, de Tournon; Chellier, de Constantine; Lamy, Marcellin, Leblanc, de Cherbourg; Bruyand, Franquet, de Troyes; Chersey, d'Ocagne, de Chaptal; J.B., à Charlemagne; d'Arodes, à Mont-de-Marsan; Johannet, Bussy, à Châteauroux; Choyer, de Poitiers; Charzat, de Melun; Merle des Isles, Objois, Lignon, à Moulins; Dalzon, à Saint-Etienne; Stegemann, Garnier, Rey, au lycée Saint Louis; Thual, à Lorient; Robert, à Montluçon; Letourneur, à Falaise; Morgain Clavez, Moret-Blanc, à Lons-le-Saulnier; Jordan, à Montpellier; Laclette, à Pau; Renevey et Gubiand, à Bourg; Dupuy, à Grenoble; Reuss, à Belfort; Jimenez, à Bordeaux; Chrétien, au Havre; Vitrac, à Angoulême.

2e SOLUTION.

Par M. Cotterеau, élève du Lycée de Châteauroux.

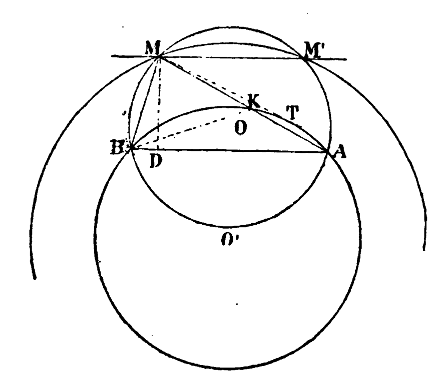
La droite AC étant la transformée par rayons vecteurs réciproques de la circonférence circonscrite, B étant le pôle et $\overline{BA}^2$ le module d'inversion; on a donc $\overline{AB}^2 = BD \;.\; BH.$

QUESTION 105.

Solution par M. Dorlet, élève du Lycée de Dijon.

Construire géométriquement un triangle dont on connaît un côté, l'angle opposé et le produit des deux autres côtés.

Décrivons sur la base AB un segment capable de l'angle



donné, nous aurons le cercle circonscrit au triangle cherché. L'arc AMB est un premier lieu du sommet M. Cherchons-en un second lieu. D'après un théorème connu AM . MB = MD . 2R MD étant la perpendiculaire abaissée du sommet M sur AB et 2R le diamètre du cercle circonscrit. De cette relation on tire $MD = \frac{m^2}{2R}$

On mènera à AB une parallèle à cette distance, parallèle qui coupera la circonférence en deux points M et M'. Joignant ces deux points aux points A et B on aura deux triangles répondant à la question. On aura la condition de possibilité du problème en exprimant que MD doit être plus petite que la flèche du segment. (Question de trigonométrie.)

On peut encore obtenir le second lieu de la manière suivante : Si l'on prend MK = MB et si l'on joint BK, le triangle KBM sera isoscèle et l'angle extérieur $AKB = \frac{\alpha}{2} + 90°$.

Décrivons sur AB un segment capable de cet angle et soit O' son centre ; menons MT tangente à l'arc, on a

$$\overline{MT}^2 = AM \;.\; MK = AM \;.\; MB = m^2$$

donc MT est connu.

Un second lieu de M est celui des extrémités des tangentes de longueur *m*, menées à la circonférence O'. C'est une circonférence concentrique à O'.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Hugentobler, de Boppelsen (Suisse); Perrin, de Clermont-Ferrand; Menand, de Dijon; Gelinet, Gilbert, Huet, d'Orléans; Osmont, collége de Bernay; Cordeau, école Lavoisier; Charlot, lycée Henri IV; Mirjolet, Dumas, de Longwy; Demortain, de Doullens; Montenot, de Troyes; Thomas, de Sainte-Barbe; Vautré, de Saint-Dié; Depallières, de Belley ; Ibach, de Marseille, école Belzunce; Pelus, de Tournon; Lamy, Marcelin, Leblanc, de Cherbourg; Chellier, de Constantine; Ancion, de Dinant; Isay, de Nancy; Chancogne, de Périgueux; Cottereau, de Châteauroux; Bruyand, de Troyes; Chersey, d'Ocagne, collége Chaptal; Carlier, Lambert, Cuvelier, de Dinant; J. B., au lycée Charlemagne; Choyer, à Poi-

tiers; Charzat, à Melun; Lemoine, à Laon; Dalzon, à Saint-Etienne; Garnier, lycée Saint-Louis; Margain et Clavez, à Lons-le-Saulnier; Jordan, à Montpellier; Renevey et Gubiand, à Bourg; Martin, Reuss, à Belfort; Chrétien, au Havre; Vitrac, à Angoulême.

QUESTIONS PROPOSÉES

121. — Étant donné un triangle ABC, sur chacun de ses côtés, on construit, extérieurement au triangle ABC des triangles semblables, de telle manière que chacun des angles adjacents à A soit égal à C, chacun des angles adjacents à B soit égal à A, et que chacun des angles adjacents à C soit égal à B. Démontrer que les trois cercles circonscrits à ces triangles, et les droites qui joignent chacun des sommets du triangle ABC au sommet opposé, se coupent en un même point O tel que les angles OBC, OCA, OAB sont égaux entre eux. *(The Educational Times.)*

122. — Étant donné un point A entre deux parallèles, tracer un triangle rectangle ayant son sommet de l'angle droit en A et les autres sommets sur les deux parallèles, de manière que sa surface soit minima.

123. Dans le cas douteux d'un triangle, si l'on connaît A, a, b, et que l'on considère les deux solutions :

1° Les centres des deux cercles inscrits et des deux cercles ex-inscrits touchant le côté c sont sur une même circonférence.

2° Le produit des rayons des deux cercles inscrits et des deux cercles ex-inscrits touchant le côté b est égal au produit des surfaces des deux triangles.

3° La somme des rayons des deux cercles inscrits et des deux cercles ex-inscrits touchant le côté a est égale au double de la hauteur commune aux deux trianglos.

(*Tucker*, *dans* « Educational Times ».)

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 10104-8.

ÉTUDE SUR LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE

par F. R. A.

(*Suite et fin*, voir pages 161 et 193.)

X. *Variété du calcul : emploi de la numération binaire.*

On simplifie le calcul direct des logarithmes, en les cherchant dans le système de *numération binaire :* ce système n'ayant d'autres chiffres que 1 et 0, il suffit de décider pour chaque ordre que l'on cherche, s'il n'y a pas d'unité à poser, ou s'il y en a : dans le premier cas on met 0, et dans le second on écrit 1, sans autre recherche.

On ramène d'ailleurs le résultat au système décimal à l'aide de la table suivante, dans laquelle nous mettons seulement les ordres fractionnaires.

ORDRES FRACTIONNAIRES BINAIRES.		VALEURS EN SYSTÈME DÉCIMAL.	
1er ordre	0,100	0,400 000	(1)
2e »	0,010	0,250 000	(2)
3e »	0,001	0,125 000	(3)
4e ordre	0,000 100	0,062 500	(4)
5e »	10	31 250	(5)
6e »	1	15 625	(6)
7e ordre	0,000 000 100	0,007 813	(7)
8e »	10	3 906	(8)
9e »	1	1 953	(9)
10e ordre	0,000 000 000 100	0,000 977	(10)
11e »	10	488	(11)
12e »	1	244	(12)
13e ordre	0,000 000 000 000 100	0,000 122	(13)
14e »	10	61	(14)
15e »	1	31	(15)
16e ordre	0,000 000 000 000 000 100	0,000 015	(16)
17e »	10	8	(17)
18e »	1	4	(18)
19e ordre	0,000 000 000 000 000 000 10	0,000 002	(19)
20e »	1	1	(20)

Pour avoir un logarithme à 1 dixième près, il faut prendre les ordres fractionnaires qui fournissent des centièmes, et par conséquent les six premiers ordres fractionnaires binaires; de même, pour avoir deux décimales exactes au logarithme, il faudra aller jusqu'au neuvième ordre; pour avoir trois décimales, jusqu'au treizième ordre; pour avoir quatre décimales, jusqu'au seizième ordre, et pour avoir cinq décimales, jusqu'au vingtième ordre.

Dans l'exposé qui va suivre, on verra qu'on est conduit à *carrer* 20 fois consécutivement le nombre donné. Il suffit qu'on ait le 20e carré à 1/10 près de sa valeur.

Si l'on supposait le maximum d'erreur, et une suite non interrompue des cas les plus défavorables, il faudrait qu'on eût le 19e carré à 1/20 près de sa valeur, le 18e à 1/40 près et ainsi de suite; de sorte que le nombre lui-même devrait être pris à *un* 5 000 000e près de sa valeur, c'est-à-dire avec 7 ou 8 chiffres.

Si l'on supposait le minimum d'erreur, et une suite non interrompue des cas les plus favorables, il suffirait de prendre le nombre lui-même à 1/10 près de sa valeur, c'est-à-dire avec 2 chiffres.

La réalité pratique se trouvant, en moyenne, également éloignée de ces cas extrêmes, il suffira de prendre le nombre avec 5 chiffres et de descendre progressivement jusqu'à 2 chiffres (1).

Avant de donner des exemples, rappelons qu'en vertu de la propriété troisième des rapports algébriques, *si l'on veut doubler la raison, il suffit d'élever au carré l'antécédent du rapport*. Par exemple, si l'on a $\frac{n}{2} = \frac{a}{b}$, on pourra conclure $n = \frac{a^2}{b}$.

(1) On fera, par exemple, 5 opérations avec 5 chiffres, 5 avec 4 chiffres, 5 avec 3 chiffres, et les 5 dernières avec 2 chiffres. — Lorsqu'un nombre commence à gauche par le chiffre 1, on prend un chiffre de plus (du moins dans le calcul) en considérant le 1 et le chiffre suivant comme formant une sorte de *chiffre composé*...

9e exemple.

Calcul du logarithme de 3 par l'équation $10^x = 3$.

Les *Tables* donnent, pour ce logarithme, 0,477 12, soit, en système binaire, 0,011 110 100 010 000 010 01.

C'est ce nombre qu'il s'agit de trouver. Le zéro qui est au premier ordre fractionnaire exprime que le nombre ne renferme pas une valeur égale à 1/2 ou 0,500; le chiffre 1 qui suit exprime qu'il y a 1/4 ou 0,250; le 1 suivant, qu'il y a 1/8 ou 0,125; et ainsi de suite.

Appelons z, z', z'', z''', etc., les chiffres successifs de ce développement; z exprime combien il y a de demies, z' représente des moitiés de demies ou des quarts, z'' des moitiés de quarts ou des huitièmes, etc.

On peut poser $x = \frac{3}{10} = \frac{z}{2}$;

d'où, en doublant,

$$(1^{er}\text{ ordre})\ z = \frac{3^2}{10} \text{ ou } \frac{9}{10} = 0 + \frac{9}{10} \text{ ou } 0 + \frac{z'}{2},$$

$$(2^e\text{ ordre})\ z' = \frac{9^2}{10} \text{ ou } \frac{81}{10} = 1 + \frac{8,1}{10} \text{ ou } 1 + \frac{z''}{2},$$

$$(3^e\text{ ordre})\ z'' = \frac{8,1^2}{10} \text{ ou } \frac{65,61}{10} = 1 + \frac{6,561}{10} \text{ ou } 1 + \frac{z'''}{2}$$

Ces quelques lignes suffisent pour montrer la loi du calcul à effectuer : le nombre 3 élevé au carré n'étant pas supérieur à 10, il n'y a pas d'unité du premier ordre fractionnaire;

9 au carré donne 81, qui est plus grand que 10; il y a donc une division possible par 10 (le quotient est 8,1), et nous aurons à compter une unité du 2e ordre fractionnaire.

8,1 au carré donne 65,61, qui est plus grand que 10; il y a donc une division possible par 10, et nous aurons à compter une unité du 3e ordre fractionnaire...

Voici les valeurs obtenues pour les 20 carrés successifs, en partant du nombre 3, et en divisant par 10 lorsque c'est possible, ce que nous marquons d'un signe * (1).

---

(1) Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que les derniers carrés soient exacts, même à 1/10 près de leur valeur : il suffit que l'on puisse voir si ces carrés sont supérieurs à 10...

1er	carré	9	
2e	»	8,1	*
3e	»	6,5,61	*
4e	»	4,3,047	*
5e	»	1,8,530	*
6e	»	3,434	
7e	»	1,179	*
8e	»	1,390	
9e	»	1,932	
10e	»	3,733	
11e	»	1,3,9	*
12e	»	1,94	
13e	»	3,78	
14e	»	1,4,3	*
15e	»	2,04	
16e	»	4,2	
17e	»	1,7	*
18e	»	3,0	
19e	»	9,0	
20e	»	8,1	*

Chaque carré obtenu permet de poser un chiffre au résultat exprimé en système binaire, savoir : 1 si le carré a pu être divisé par 10*, 0 dans le cas contraire.

On a donc, en système binaire, pour l'expression du logarithme de 3 :

0,011 110 100 010 010 010 01

Et voici la traduction de ce nombre en système décimal :

ORDRES BINAIRES*	VALEURS EN DÉCIMALES
2e ordre	0,250 000
3e »	125 000
4e »	62 500
5e »	31 250
7e »	7 813
11e »	488
14e »	61
17e »	8
20e »	1
Total, log. 3 ...	0, 477 12

Cette méthode est bien plus commode que la précédente : les opérations à faire sont tout à fait uniformes, et en nombre complétement déterminé.

La première méthode pourrait exiger un bien plus grand nombre d'opérations ; c'est ce qui aurait lieu pour le nombre π ou 3,141 592 6... Le logarithme 0,497 15, développé en fraction continue, devient

$$0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{87 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 \ldots}}}}$$

Il y aurait donc à faire 2 opérations pour trouver le premier dénominateur, 87 pour le second, 4 pour le troisième,

1 pour le quatrième; en tout 93 opérations, tandis que la seconde méthode n'exigera que 20, pour π comme pour tout autre nombre.

10e exemple.

Calcul du logarithme de π, par l'équation $10^x = 3,141\ 592\ 6$.

Voici les valeurs obtenues pour les 20 carrés successifs, avec la division par 10 lorsqu'elle est possible *.

1er	carré	9,8696	
2e	»	9,7,409	*
3e	»	9,4,885	*
4e	»	9,0,032	*
5e	»	8,1,058	*
6e	»	6,5,70	*
7e	»	4,3,17	*
8e	»	1,8,64	*
9e	»	3,473	
10e	»	1,2,06	*
11e	»	1,46	
12e	»	2,12	
13e	»	4,49	
14e	»	2,0,2	*
15e	»	4,06	
16e	»	1,6 .	*
17e	»	2,7	
18e	»	7,3	
19e	»	5,3	*
20e	»	2,8	*

On a donc, en système binaire :

Log π =

0,011 111 110 100 010 100 11

Et voici la traduction en système décimal :

ORDRES BINAIRES*	VALEURS EN DÉCIMALES
2e ordre	0,250 000
3e »	125 000
4e »	62 500
5e »	31 250
6e »	15 625
7e »	7 813
8e »	3 906
10e »	977
14e »	61
16e »	15
19e »	2
20e »	1
Total, log π....	0,497 15

La règle pratique de ce calcul peut être formulée comme il suit :

« *Pour trouver, avec cinq décimales, le logarithme quelconque d'un nombre quelconque*, on divise d'abord ce nombre par 10 successivement, autant de fois que possible (par un simple mouvement de virgule); le nombre des divisions effectuées donne la partie entière du logarithme;

» Le dernier quotient obtenu (qui est un chiffre entier suivi de chiffres décimaux) est pris à 8 chiffres; on l'élève consécutivement 20 fois au carré, faisant 3 opérations à 8 chiffres, 3 à 7 chiffres, 3 à 6, etc.;

» Chaque fois qu'un carré est divisible par 10, on effectue cette division, et on marque d'un signe le numéro d'ordre de ce carré; si c'est le 1er carré, le 2e, le 3e..... le *n*e, on devra relever les valeurs décimales correspondant à $1/2$, $1/2^2$, $1/2^3$..... $1/2^n$.

» *La somme de ces valeurs donne le logarithme cherché.* »

XI. Conclusion.

L'introduction des logarithmes dans les calculs permet de remplacer certaines opérations par d'autres plus simples.

Ainsi, la somme ou la différence de deux logarithmes répond au produit ou au quotient des nombres correspondants;

La multiplication ou la division d'un logarithme par un nombre quelconque, correspond à une formation de puissance ou à une extraction de racine;

Enfin, la division d'un logarithme par un autre logarithme cache une septième opération, qui n'est autre que celle que nous venons d'étudier sous le nom d'*Exponentation*.

La notion claire de cette opération, l'adoption d'un signe pour l'indiquer, la connaissance des propriétés essentielles de l'expression exponentielle, permettent de considérer désormais cette expression comme n'étant plus une *fonction transcendante*, mais bien une *fonction élémentaire*, que l'on sait augmenter ou diminuer, multiplier ou diviser, et dont on peut prendre directement la dérivée ou la différentielle.

Et loin d'avoir besoin des logarithmes pour calculer l'exposant, connaissant la puissance et la racine, on peut par l'Exponentation elle-même, effectuée directement, calculer *à priori* et sous une forme élémentaire, le logarithme d'un nombre quelconque, et pour une base quelconque.

Disons, en terminant, que les *logarithmes* doivent demeurer pratiquement comme le plus précieux instrument de calcul, pour la Multiplication et la Division, aussi bien que pour l'Exaltation, l'Extraction et l'Exponentation.

F. R. A.

DES PROJECTIONS EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Par M. **Pillet.**

PROJECTIONS OBLIQUES

On emploie en Géométrie descriptive deux espèces de projections : les projections cylindriques et les projections coniques.

Les projections orthogonales ne sont qu'un cas particulier des projections cylindriques, dans lequel les projetantes sont perpendiculaires aux plans de projection; mais il est quelquefois avantageux d'employer des projetantes obliques.

Lorsqu'on fait des projections obliques, on a à appliquer les deux problèmes suivants :

1° Les projections orthogonales d'un point étant données, trouver sa projection oblique sur un des plans de projection;

2° La projection oblique d'un point et la direction des projetantes étant données, retrouver les projections orthogonales de ce point, sachant qu'il est sur une ligne dont les projections sont connues.

Pour résoudre ces deux problèmes, il suffit de remarquer que la projection oblique d'un point sur le plan horizontal, par exemple, n'est autre chose que la trace horizontale d'une projetante passant par ce point.

Droite.

Il est facile de démontrer les théorèmes suivants :

1° Toute ligne droite a pour projection oblique une ligne droite;

2° Toute ligne droite parallèle aux projetantes se projette en un point;

Il en résulte qu'un cylindre se projette suivant sa trace sur le plan de projection, si on prend comme projetantes des parallèles aux génératrices.

3° Une droite parallèle au plan de projection s'y projette obliquement en vraie grandeur;

Il en résulte qu'un angle dont les côtés sont parallèles au plan de projection, a pour projection oblique un angle égal, et par suite, toute figure parallèle au plan de projection se projette en vraie grandeur.

4° Les projections de deux droites parallèles sont parallèles;

La réciproque n'est pas vraie si la projection n'est faite que sur un seul plan, mais si les projections obliques de deux droites sur deux plans différents sont parallèles, les deux droites sont parallèles dans l'espace.

Plan.

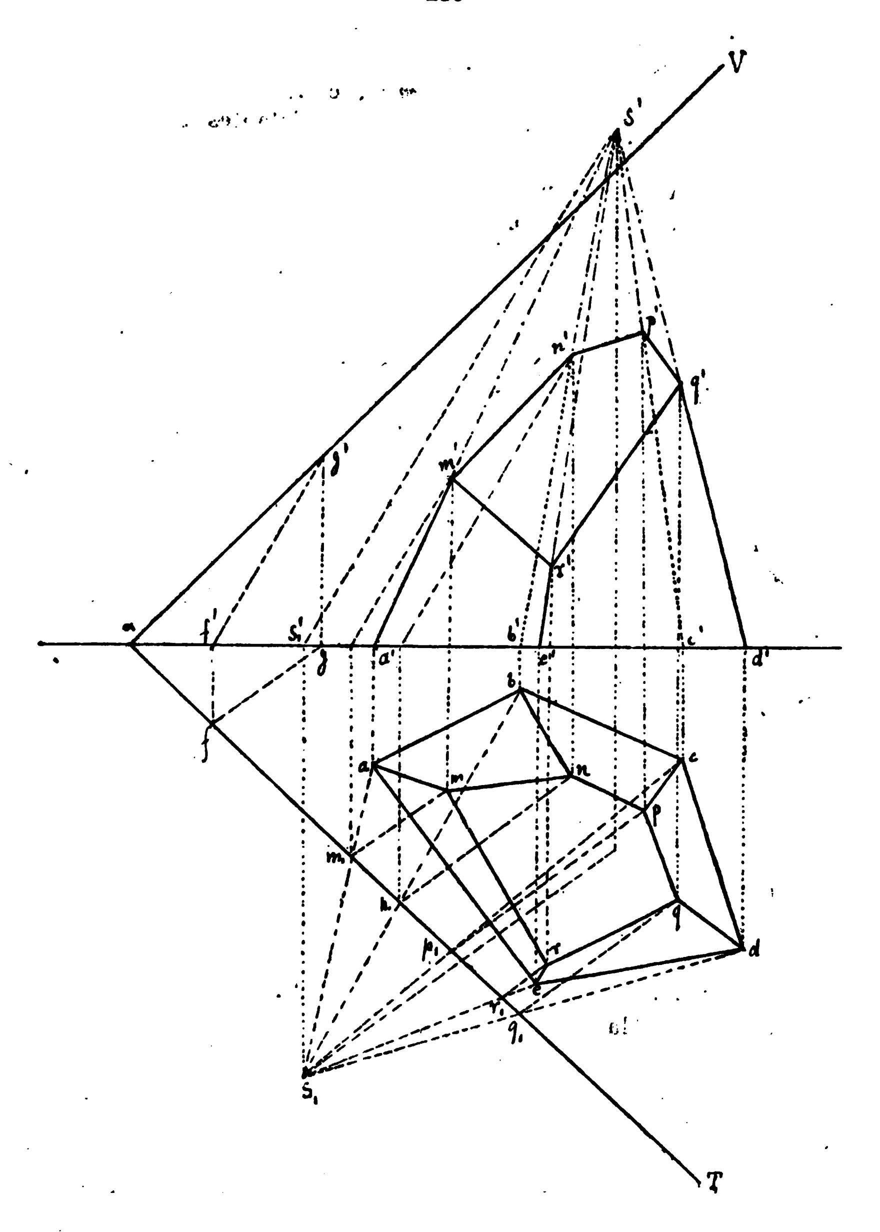
Un plan est déterminé en projection oblique par les projections de deux ou plusieurs droites de ce plan. Dans le cas particulier où le plan est parallèle aux projetantes, il se projette suivant une droite qui est sa trace sur le plan de projection. Il en résulte que toutes les figures de ce plan se projetteront sur sa trace.

Appliquons cette propriété à la recherche de la section plane d'un polyèdre.

Section plane d'un polyèdre.

Soit une pyramide pentagonale coupée par le plan VαT, je prends arbitrairement une droite $f'g'$, fg du plan et je choisis les projetantes obliques parallèles à cette droite; de cette façon, tout le plan, et par suite toute la section cherchée auront leur projection oblique condensée sur la trace αT du du plan.

La base de la pyramide est à elle-même sa projection oblique sur ce plan. Le sommet se projette obliquemment en s_1, et les différentes arêtes en s_1a, s_1b etc., qui coupent la


V
s'
p'
n'
q'
g'
m'
r'
f'
s'₁
b'
c'
a'
e'
d'
g
b
f
a
m
n
c
p
m₁
h
q
p₁
r
d
e
r₁
q₁
S₁
T

trace horizontale du plan en $m_1n_1p_1q_1r_1$; $m_1n_1p_1q_1r_1$ est la projection oblique de la section. J'en trouve la projection horizontale en relevant les points m_1n_1, etc., sur les arêtes correspondantes *sa*, *sb*, etc., par des projetantes obliques inverses.

Pour avoir la projection verticale, je pourrai relever les points par des lignes de rappel; comme vérification, si je mène les projetantes verticales m_1m, n_1n, etc., elles coupent les arêtes en $m'n'$, etc.

Intersection d'un tronc de pyramide quadrangulaire à bases parallèles et d'un cylindre.

Le tronc de pyramide a sa base horizontale; le cylindre est circonscrit à une sphère tangente aux deux bases du tronc; son axe est une droite quelconque.

Je prends des projetantes parallèles aux génératrices du cylindre; le cylindre se projette en entier sur le plan horizontal suivant sa trace qui est une ellipse.

Pour l'obtenir, je change de plan vertical, et je prends pour nouvelle ligne de terre la droite oO_1, projection horizontale de l'axe du cylindre. Le cylindre est parallèle au plan vertical et sa trace est l'ellipse $g_1k_1h_1l_1$.

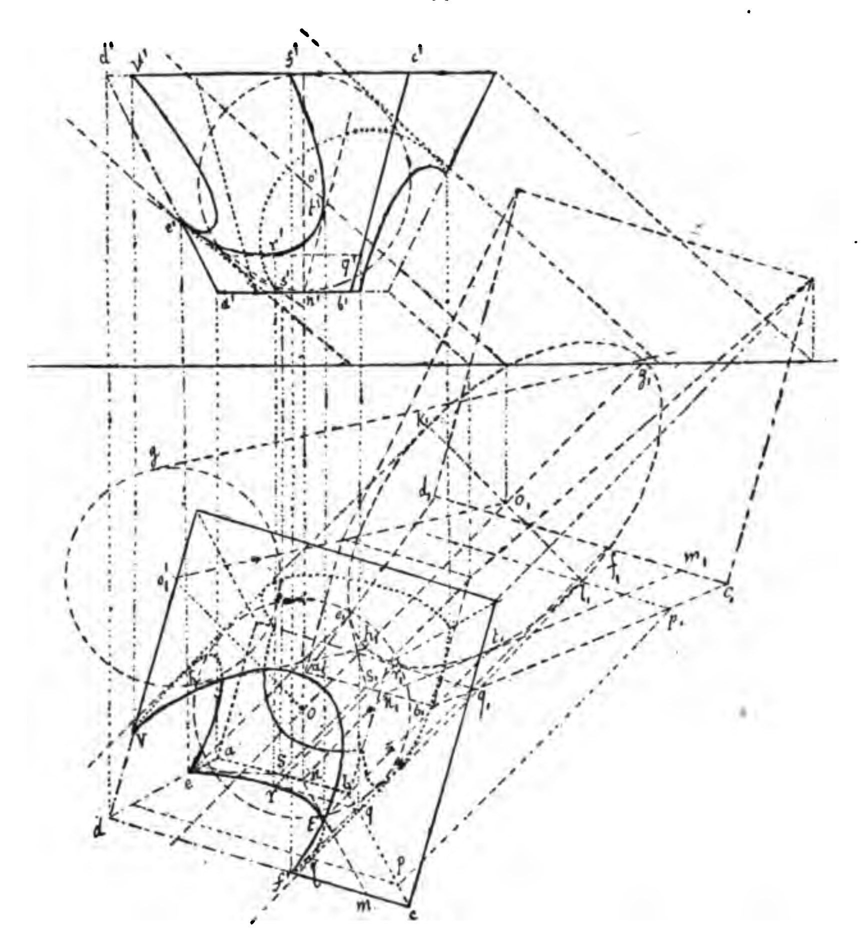
Je cherche la projection oblique du tronc de pyramide. Les deux bases, parallèles au plan horizontal, se projettent obliquement en vraie grandeur.

Si je considère la projection $a_1b_1c_1d_1$ de la face *abcd*, l'arc d'ellipse $f_1t_1e_1$ compris dans l'intérieur de ce quadrilatère est la projection oblique de la courbe d'intersection du cylindre et de la face; je relève cette intersection.

Je relève d'abord les points e_1f_1 situés sur les arêtes *ad*, *ed* du tronc.

Si je mène la tangente e_1s_1 à l'ellipse projection, elle est la projection oblique de la tangente au point *e* de l'espace. Le point s_1 est sur le côté *ab* et il se relève en *s*; *es* est la tangente.

Pour obtenir un point quelconque de la courbe, je prends sur l'ellipse un point en projection oblique, et je mène par



ce point une droite de la face; je la relève, et sur cette droite je relève le point de la courbe.

Mais il est préférable de relever une tangente. Je vais relever par exemple la tangente parallèle à l'arête *bc* et le point situé sur cette tangente. Je mène en projection oblique la tangente $m_1t_1n_1$ parallèle à b_1c_1 et je relève le point où elle coupe l'arête *ab* en *n*. Je mène par *n* une parallèle à *bc* et je relève le point *t* sur cette droite.

Ce qui précède suffit pour faire comprendre comment on résoudrait les questions suivantes. Trouver le point le plus haut ou le plus bas des diverses ellipses d'intersection.

Trouver les points le plus à gauche et le plus à droite de ces ellipses.

Trouver les points de ces ellipses pour lesquelles les tangentes passent par un point donné ou sont parallèles à une droite donnée.

Application aux ombres.

Soit à trouver l'ombre portée par une surface (une sphère par exemple) sur un polyèdre. Le problème revient : 1° à circonscrire à la surface un cylindre parallèle aux rayons lumineux et tout à fait analogue au cylindre précédent; 2° à chercher son intersection avec le polyèdre.

On cherchera l'ombre portée par la surface et par le polyèdre sur un plan auxiliaire (le plan horizontal par exemple).

L'ombre portée par la sphère fournira l'ellipse de base du cylindre précédent; l'ombre portée par le polyèdre donnera une projection oblique de ce dernier comme ci-dessus, et en raisonnant de la même manière, on remontera par des rayons lumineux inverses au lieu de projetantes obliques inverses des points de l'ombre portée sur le plan horizontal aux points de l'ombre portée par la surface sur le polyèdre.

(*A suivre.*)

NOTE D'ARITHMÉTIQUE

DÉTERMINATION DU CHIFFRE TERMINANT LES PUISSANCES SUCCESSIVES DES NOMBRES ENTIERS

par **Georges Dostor**.

I. **Principe.** — *Lorsque le dernier chiffre d'un nombre est augmenté d'une unité, le dernier chiffre de la* cinquième *puissance de ce nombre est aussi augmenté d'une unité.*

Soit a un nombre entier; si nous augmentons le dernier chiffre d'une unité, le nombre résultant sera $a + 1$.

Or nous avons

$$(a + 1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1,$$

ou $$(a + 1)^5 = (a^5 + 1) + 5a\,(a^3 + 1) + 10a^2\,(a + 1).$$

Que le nombre a soit pair ou impair, l'un des deux facteurs du produit $a(a^3 + 1)$ sera pair et l'autre impair; par suite ce produit sera un multiple de 2. Il s'ensuit que le produit $5a(a^3 + 1)$ sera un multiple de 10. D'ailleurs, le produit $10a^2\,(a + 1)$ est aussi un multiple de 10.

Donc le dernier chiffre de $(a + 1)^5$ est le même que celui de $a^5 + 1$, ce qu'il fallait prouver.

II. **Corollaire 1.** — La 5e puissance de 1 étant 1, le dernier chiffre de 2^5 sera $1 + 1$ ou 2; par suite le dernier chiffre de 3^5 sera $2 + 1$ ou 3; celui de 4^5 sera $3 + 1$ ou 4; et ainsi de suite.

Or toute puissance d'un nombre entier est terminée par le même chiffre que la même puissance du dernier chiffre de ce nombre. Donc

La cinquième puissance d'un nombre entier est terminée par le même chiffre que ce nombre.

III. **Corollaire 2.** — On en conclut que la $(5 + 4)^{me}$ ou la 9me puissance d'un nombre, puis la $(9 + 4)^{me}$ ou la 13me puissance de ce nombre, ensuite la $(13 + 4)^{me}$ ou la 17me puissance,... sont terminées par le même chiffre que ce nombre. Donc

La $(4n + 1)^{me}$ *puissance d'un nombre entier est terminée par le même chiffre que ce nombre.*

IV. **Corollaire 3.** — Soit $m = 4n + r$, où r est moindre que 4. On a $a^m = a^{4n+r} = a^{4n+1} \,.\, a^{r-1}$.

Or a^{4n+1} est terminé par le même chiffre que a; donc le produit de a^{4n+1} par a^{r-1} ou a^{4n+r} sera terminé par le même chiffre que le produit de a par a^{r-1} ou que a^r. Donc

La m^e^ *puissance d'un nombre entier est terminée par le même chiffre que la puissance de ce nombre, qui est d'un degré égal au reste de la division de* m *par* 4.

V. **Conclusion.** — De ce qui précède découle la règle suivante :

Formons le tableau des chiffres qui terminent les quatre premières puissances des neuf premiers nombres entiers.

DEGRÉS des puissances		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$4n + 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$4n + 2$	1	4	9	6	5	6	9	4	1
3	$4n + 3$	1	8	7	4	5	6	3	2	9
4	$4n$	1	6	1	6	5	6	1	6	1

Le chiffre qui termine une puissance de degré quelconque $4n + r$ *d'un nombre entier* a, *se trouve à la rencontre de la ligne qui commence par* $4n + r$, *et de la colonne qui commence par* a.

VI. — L'inspection de ce tableau fait voir que :

1° *Les nombres terminés par* 1, *par* 5 *ou par* 6, *ont toutes leurs puissances terminées par le même chiffre.*

2° *Les nombres terminés par* 4 *ou par* 9 *ont toutes leurs puissances terminées, les premiers par les chiffres* 4 *et* 6, *les seconds par les chiffres* 9 *et* 1.

3° *Deux nombres terminés par deux chiffres complémentaires (dont la somme égale* 10*), ont toutes leurs puissances paires terminées par les mêmes chiffres, et leurs puissances impaires terminées par deux chiffres complémentaires.*

NOTE SUR LE VOLUME DU TRONC DE PYRAMIDE

par **Maurice d'Ocagne,** élève au Collége Chaptal.

I. — C'est une méthode fréquemment employée en géométrie, dans l'étude des polyèdres, de partir du cas où le polyèdre étudié a une base triangulaire et de généraliser

ensuite les résultats obtenus pour le cas où la base du polyèdre est un polygone quelconque.

Or cette méthode n'est pas, en général, appliquée dans les traités de géométrie, au cas du tronc de pyramide.

C'est cette application que nous allons faire dans la première partie de cette note.

Soient B et B' les bases d'un tronc de pyramide d'un nombre quelconque de côtés, soit h sa hauteur.

Décomposons ce tronc en troncs de pyramides triangulaires par des plans passant par l'une des arêtes latérales et chacune des autres.

Soient b, b_1, b_2,... et b', b'_1, b'_2,..., les bases des troncs ainsi formés. On a

$$V = \frac{h}{3}(b + b_1 + b_2 + \ldots + b' + b'_1 + b'_2 \ldots + \sqrt{bb'} + \sqrt{b_1b'_1} + \sqrt{b_2b'_2} + \ldots)$$

$$\text{ou } V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{bb'} + \sqrt{b_1b'_1} + \sqrt{b_2b'_2} + \ldots\right) \quad (1)$$

Or on a $$\frac{b}{b'} = \frac{b_1}{b'_1} = \frac{b_2}{b'_2} = \ldots = \frac{B}{B'}$$

ou, en multipliant les deux termes de chaque fraction par son dénominateur,

$$\frac{bb'}{b'^2} = \frac{b_1b'_1}{b'^2_1} = \frac{b_2b'_2}{b'^2_2} = \ldots = \frac{BB'}{B'^2}$$

ou encore $$\frac{\sqrt{bb'}}{b'} = \frac{\sqrt{b_1b'_1}}{b'_1} = \frac{\sqrt{b_2b'_2}}{b'_2} = \ldots = \frac{\sqrt{BB'}}{B'}$$

De plus, une propriété connue des rapports donne

$$\frac{\sqrt{bb'} + \sqrt{b_1b'_1} + \sqrt{b_2b'_2} + \ldots}{b' + b'_1 + b'_2 + \ldots} = \frac{\sqrt{BB'}}{B'}$$

ou $$\frac{\sqrt{bb'} + \sqrt{b_1b'_1} + \sqrt{b_2b'_2} + \ldots}{B'} = \frac{\sqrt{BB'}}{B'}$$

c'est-à-dire $$\sqrt{bb'} + \sqrt{b_1b'_1} + \sqrt{b_2b'_2} + \ldots = \sqrt{BB'}$$

L'expression (1) devient donc

$$V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$$

qui est bien la formule connue.

II. — Nous allons voir maintenant comment on peut déterminer le volume du tronc de pyramide à base rectan-

gulaire sans passer par le tronc de pyramide à base triangulaire.

Nous partirons de la formule dite du tas de sable et que l'on détermine dans tous les livres. Cette formule est

$$V = \frac{h}{6}\Big[\, b\,(2a + a') + b'\,(2a' + a) \Big]$$

ou $$V = \frac{h}{3}\,(ab + a'b') + \frac{h}{6}\,(a'b + ab')$$

Or, si dans un tel solide on a $\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'}$, ce corps est un tronc de pyramide à base rectangulaire.

Représentons ses bases par B et B'. Nous avons

$$V = \frac{h}{3}\,(B + B') + \frac{h}{6}(a'b = ab')$$

Mais puisque $\frac{a}{a} = \frac{b}{b'}$, on a $ab' = a'b$.

Donc $$V = \frac{h}{3}(B + B') + \frac{h}{6}\,.\,2a'b$$

$$V = \frac{h}{3}\,(B + B' + a'b)$$

or, je dis que $a'b = \sqrt{BB'}$.

En effet, $BB' = ab\;.\;a'b' = ab'\;.\;a'b$

ou comme $ab' = a'b,\qquad BB' = (ab')^2$

d'où $ab' = \sqrt{BB'}$

La formule devient donc bien $V = \frac{h}{3}\,(B + B' + \sqrt{BB'})$

NOTE D'ALGÈBRE

par M. **Fajon**, professeur.

Cas où la fonction $y = \dfrac{ax' + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ *est constante x étant une variable indépendante.*

Si les coefficients a', b', c' du dénominateur ne sont pas tous nuls, toute valeur d'x autre que les racines du trinôme $a'x^2 + b'x + c'$, s'il en a, déterminera une valeur

pour y. Dans ce cas, la fonction y peut varier sans limites, varier entre des limites, ou rester constante. C'est ce dernier cas que nous allons examiner dans la recherche des maximum et minimum de la fonction.

En mettant l'expression donnée sous la forme d'une équation du 2e degré en x on a :

$$(a'y - a)\, x^2 + (b'y - b)\, x + (c'y - c) = 0, \quad (1)$$

y étant constante, x sera indéterminé si l'on a les trois conditions simultanées :

$$a'y - a = 0, \quad b'y - b = 0, \quad c'y - c = 0, \quad (2)$$

d'où

$$y = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Si $b' = 0$, ces trois conditions seront satisfaites par

$$b' = 0,\ b = 0, \quad y = \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'};$$

on a des conditions analogues pour les cas de $a' = 0$ ou $c' = 0$.

Si l'on a $a' = 0$, $b' = 0$, on devra avoir aussi :

$$a = 0,\ b = 0,\ y = \frac{c}{c'}.$$

Dans le cas de $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$, les conditions (2) exigent que l'on ait aussi $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; y est alors indéterminé. Pour chaque valeur de cette fonction, x peut varier sans limites. En d'autres termes, x et y sont indépendants l'un de l'autre.

La condition de réalité d'x, déduite de l'équation (1) est

$$(b'y - b)^2 - 4\,(a'y - a)\,(c'y - c) \geq 0 \quad (3)$$

ou bien en ordonnant par rapport à y et posant

$b'^2 - 4a'c' = \mathrm{A}$, $2ac' + 2ca' - bb' = \mathrm{B}$, $b^2 - 4ac - \mathrm{C}$,

$$\mathrm{A}y^2 + 2\,\mathrm{B}y + \mathrm{C} \geq 0 \quad (4)$$

ou en désignant ce trinôme par M

$$\mathrm{M} \geq 0 \quad (5)$$

C'est en discutant l'expression (4) qu'on trouve les cas où la fonction est variable ou constante. Nous ne considérons que les cas où la fonction est constante.

1° $\mathrm{A} < 0$. Le trinôme M doit avoir un signe contraire à A ou s'annuler.

Les racines de ce trinôme sont réelles, car ni a' ni c' ne pouvant être nuls, $\frac{a}{a'}$ et $\frac{c}{c'}$ sont deux valeurs de y qui satisfont à l'expression (3) et donnent $M \geq o$. Donc, on n'a pas dans tous les cas $M < o$, ce qui devrait être si les racines étaient imaginaires.

Si les racines sont égales ($y' = y''$), M s'annule pour $y = y'$ et est négatif pour toute autre valeur d'y. La fonction conserve donc la valeur constante y' quel que soit x, et l'on a, si b' n'est pas nul,

$$y = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}, \text{ ainsi qu'on vient de le voir.}$$

Si $b' = o$, on aura $b = o$, $y = \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$

Remarquons que la condition (5) se réduit à $M = o$.

2° $A = o$, $B = o$, $C = o$. L'expression (1) se réduit à $M = o$.

Si b' n'est pas nul, a' ni c' ne peuvent l'être. L'équation $M = o$ est alors satisfaite soit par $y = \frac{a}{a'}$, soit par $y = \frac{c}{c'}$. En substituant $\frac{a}{a'}$, l'équation (3) donne $b' \frac{a}{a'} - b = o$. Donc $y = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. En substituant $\frac{c}{c'}$, l'équation (3) donne aussi $b' \frac{c}{c'} - b = o$. Donc $y = \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$. On a donc

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

et la fonction y est constante.

Si b' est nul sans que c' le soit, on a

$$a' = o,\ b' = o,\ a = o,\ b = o;$$

l'équation (3) est vérifiée quel que soit y; mais l'équation (1) exige que l'on ait $c'\,y - c = o$; d'où

$$y = \frac{c}{c'},$$

et la fonction y est encore constante.

Si b' est nul sans que c' le soit, on a

$$b' = o,\ c' = o,\ b = o,\ c = o,$$

l'équation (3) est encore vérifiée quel que soit y ; mais l'équation (1) exige que l'on ait

$$(a'y - a)\, x^2 = o.$$

Donc $y = \frac{a}{a'}$ tant que x n'est pas nul, et la fonction est constante ; et si $x = o$, y peut prendre une valeur arbitraire.

Ces trois cas sont les seuls où y reste constante, lorsque $A = o$, $B = o$, $C = o$.

Dans les autres cas, $a' = o$, $b' = o$, $c' = o$, la fonction y peut varier sans limites.

ÉCOLE FORESTIÈRE 1878.

Mathématiques.

1. — Un document daté de 1759, après avoir porté la valeur totale d'une forêt à 343,547 livres tournois, 17 sols, 10 deniers, fait remarquer qu'il en résulte que la valeur moyenne de l'arpent est de 683 livres, 4 sols, 1 denier 4/10. — Or, cette forêt contient actuellement 217 hectares 57 ares 69 centiares. On demande si la contenance a augmenté ou diminué depuis 1759, et de combien d'arpents ou d'hectares. — On sait que l'arpent des eaux et forêts se divisait en 100 perches, dont chacune était un carré de 22 pieds de côté.

2. — Étant donnée une droite AB, partager sa longueur au point X en deux parties AX et BX, telles que la valeur de $\overline{AX}^2 + 3.\overline{BX}^2$, soit la moindre possible.

(*Durée de la séance : 3 heures.*)

Trigonométrie et calcul logarithmique.

La base d'un tétraèdre SABC est un triangle ABC dans lequel on a

$$AB = 0^m,1691592$$
$$BC = 0^m,1373617$$

Le rapport de l'arc qui mesure l'angle BAC à son rayon, est égal à $0^m,5689908$. Le sommet S se trouve sur une perpendiculaire au plan ABC passant par le centre de gravité du triangle ABC, et à une distance telle que l'arête SC a une longueur de 1 mètre. On demande la valeur des angles du triangle ABC à un dixième de seconde près, et celles des arêtes et du volume du tétraèdre avec sept figures.

(*Durée de la séance : 3 heures.*)

Narration française.

Une saga scandinave raconte que Thorborg, femme de l'Islandais Vermund, donna un jour, en l'absence de son mari, asile à un proscrit. Vermund

lui en demanda compte d'un ton sévère. J'ai caché cet homme, dit simplement Thorborg, afin qu'en te voyant une femme capable de faire une pareille chose, on pût reconnaître en toi le plus grand des chefs. Vermund s'inclina satisfait, en lui répondant : Tu es une femme pleine de sagesse; j'approuve ta conduite et t'en remercie. (*Durée de la séance : 3 heures.*)

Thème allemand.

Dans les terres inhabitées qui sont au-dessus du pays des Hottentots, et en général dans toutes les parties méridionales de l'Afrique et de l'Asie, où l'homme a dédaigné d'habiter, les lions sont encore en assez grand nombre, et sont tels que la nature les produit. Accoutumés à mesurer leur forces avec tous les animaux qu'ils rencontrent, l'habitude de vaincre les rend intrépides et terribles; ne connaissant pas la puissance de l'homme, ils n'en ont nulle crainte; n'ayant pas éprouvé la force de ses armes, ils semblent les braver. Un seul de ces lions du désert attaque souvent une caravane entière, et lorsque, après un combat opiniâtre et violent, il se sent affaibli, au lieu de fuir, il continue de battre en retraite, en faisant toujours face et sans jamais tourner le dos. Les lions, au contraire, qui habitent aux environs des villes et des bourgades de l'Inde et de la Barbarie, ayant connu l'homme et la force de ses armes, ont perdu leur courage au point de n'oser l'attaquer. — BUFFON.

(*Durée de la séance, dictée comprise : 3 heures.*)

ÉCOLE CENTRALE 1878.

1re SESSION.

Géométrie analytique.

On donne dans un plan une droite LL′, un point F et un point A. On considère toutes les coniques pour lesquelles le point F est un foyer et la droite LL′, la directrice correspondante. Par le point A on mène des tangentes à toutes ces coniques et on demande :

1° Le lieu de la projection du point A sur toutes les cordes de contact;

2° Le lieu des points de contact.

Ce dernier lieu est une conique; reconnaître quel est son genre d'après la position du point A; et, pour une position donnée de ce point, chercher à obtenir, par des constructions simples, un nombre de points et de tangentes suffisant pour déterminer la conique.

Triangle.

On donne deux côtés a et b d'un triangle ainsi que l'angle compris C, savoir

$$a = 21753{,}788$$
$$b = 94567{,}891$$
$$C = 136^\circ\ 42'\ 37''{,}42$$

On demande de calculer :

1° Le troisième côté c;

2° Les angles A et B;

3° La surface du triangle.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.

FACULTÉ DE PARIS

Juillet.

Une pyramide a pour base un carré de côté a, son sommet est situé sur la perpendiculaire élevée au plan par le centre du carré et à une distance h de cette base; calculer le sinus de l'angle que font entre elles deux faces latérales de la pyramide.

— Prouver que l'intersection de deux sphères est plane et par conséquent circulaire.

— On donne le produit a^2 de deux nombres pontifs x et y; trouver le minimum de la somme $x + y$.

— Calculer le côté d'un hexagone régulier, sachant que le volume engendré par cet hexagone tournant autour d'un de ses côtés est égal à 1 mètre cube.

— Trouver deux angles x et y, connaissant la somme a de leurs sinus et la somme b de leurs cosinus.

— Valeur du côté du décagone régulier inscrit dans une circonférence en fonction du rayon.

— Trouver l'expression du volume engendré par un secteur circulaire AoB, tournant autour d'un diamètre xy qui ne le coupe pas. En conclure l'expression de ce volume en fonction du rayon R de la sphère dans le cas où la droite oA est perpendiculaire à xy et l'angle AoB de 60°.

— Résoudre l'équation : $2 \sin^2 3x + \sin^2 6x = 2$.

— Démontrer que les tangentes menées aux points d'intersection d'un méridien et d'une parallèle à la sphère sont perpendiculaires.

— Calculer sin A et cos A, étant donné $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

— Parmi tous les triangles rectangles qui ont même hypoténuse, quel est celui pour lequel la somme des côtés de l'angle droit est maxima?

— On demande de résoudre les équations

$$x + y + z = 0$$

$$\frac{a^2x}{a-d} + \frac{b^2y}{b-d} + \frac{c^2z}{c-d} = 0$$

$$\frac{ax}{a-d} + \frac{by}{b-d} + \frac{cz}{c-d} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

et de reconnaître que $x = 0$ si l'on suppose $b = c$; dire si le système est alors déterminé.

— Exprimer en fonction d'un rayon R d'une circonférence les périmètres des dodécagones réguliers inscrit et circonscrit à cette circonférence.

— La droite AB étant un diamètre d'une circonférence, BD la tangente au point B. Déterminer l'angle DAB de façon que l'on ait AD = 4AC. C est le point où AD coupe la circonférence.

— Les traces d'un plan $P\alpha P'$ font des angles α et β avec la ligne de terre. On demande de calculer la tangente de l'angle que fait ce plan avec le plan horizontal.

— Trouver les angles x qui satisfont à l'équation

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2.$$

— Étant donné un triangle équilatéral ABC, on prend sur les côtés AB, BC, AC et non sur leur prolongement des points A', B', C' tels que AB' = BB' = CC' = α. On donne le côté a du triangle ABC, On demande de calculer la surface du triangle A'B'C'.

— Dans un triangle rectangle on donne un des côtés de l'angle droit et le rayon du cercle inscrit. Calculer l'autre côté et l'hypoténuse.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Déterminer les rayons des deux bases d'un tronc de cône connaissant :

1° La hauteur h du tronc;

2° Le volume qui est équivalent aux trois quarts du volume de la sphère de diamètre h;

3° La surface latérale qui est équivalente à celle du cercle de rayon a.

On ne considère que des troncs formés par des plans qui coupent les arêtes d'un même côté du sommet et on indiquera le nombre des solutions qui correspondent aux diverses valeurs du rapport $\frac{h}{a}$.

RHÉTORIQUE.

Déerminer sur un diamètre AB d'une sphère de rayon R, un point tel que si l'on mène par ce point un plan perpendiculaire à ce diamètre, la surface de la zone sphérique limitée par ce plan et contenant le point A soit équivalente à la surface latérale du cône qui a pour base le cercle d'intercle d'intersection de la sphère et du plan et pour sommet le point B.

Cela étant, calculer le rapport du volume de ce cône au volume de la sphère.

— Inégalité des jours et des nuits, saisons.

PHILOSOPHIE.

On coupe une pyramide triangulaire SABC par un plan parallèle à la base; ce plan rencontre les arêtes latérales SA, SB, SC en A', B', C; on mène ensuite les plans CA'B', AB'C', BC'A'. Soit P leur point commun. Déterminer le lieu décrit par le point P, lorsque le plan A'B'C' se déplace en demeurant parallèle à la base.

CLASSE DE TROISIÈME.

On donne un cercle O, un point A sur la circonférence de ce cercle et une ligne D. Trouver sur cette ligne un point tel qu'en menant les deux tangentes à la circonférence, et en joignant les points de contact au poiut A, l'angle formé A soit égal à un angle donné V.

— Trouver deux nombres, sachant que leur rapport est $\frac{5}{18}$, leur plus grand commun diviseur 30 et leur plus petit commun multiple 2,700.

ENSEIGNEMENT SPÉCIAL.

1. — Chaleur dégagée par le courant électrique.

2. — Acide oxalique.

3. — Quel est le poids de sucre de canne qui a donné après fermentation 54 décimètres cubes d'acide carbonique sec? Quel volume d'éther acétique en vapeur pourra-t-on obtenir avec l'alcool produit?

On supposera que le volume de l'acide carbonique est mesuré 10° à celui de l'éther acétique à 80° et que les deux mesures ont été faites sous la pression $0^m,700$

CONCOURS ACADÉMIQUES DE 1878

LYON.

1. — Calculer les éléments dans les deux cas suivants :

1° On donne les angles et le périmètre;

2° On donne les angles et la somme des inverses des hauteurs.

2. — Décrire un cercle coupant à angle droit un cercle donné et passant par deux points donnés situés dans son plan.

MONTPELLIER.

Étant donné un parallélipipède rectangle dont les dimensions sont a et b, la troisième étant indéfinie, on propose de le couper par un plan, de manière que le parallélogramme de section ait un angle donné et une surface donnée.

En supposant connus seulement a et b et l'angle du parallélogramme, quelle est de toutes ces sections celle qui a la plus grande ou la plus petite surface.

Mathématiques spéciales.

Etant donnés une ellipse et un cercle sécant, on demande : 1° de trouver la relation angulaire qui lie deux sécantes conjuguées communes à ces deux courbes; 2° de déduire de l'équation de l'ellipse rapportée au cercle sécant et à deux sécantes conjuguées communes à ces deux courbes, la construction de la tangente à l'ellipse (cette construction s'obtient par la règle seulement); 3° de trouver le lieu du centre du cercle sécant de rayon constant mais variable de position, sous cette condition, que l'une des deux sécantes conjuguées communes reste parallèle à une direction donnée, et de trouver le lieu de l'intersection correspondante des deux sécantes conjuguées; 4° de trouver le lieu du centre sécant variable de grandeur et de position, sous cette condition que le rapport du rayon du cercle au diamètre de l'ellipse, parallèle à l'une des deux sécantes conjuguées communes, reste constant.

Enseignement spécial. — 3° année. — Mécanique.

Deux corps, pesant l'un 10 kgs., l'autre 15 kgs., liés par un fil dont on néglige la masse reposent respectivement sur deux plans inclinés, adossés

l'un à l'autre, faisant avec l'horizon, le 1er un angle de 60°, le 2e de 30°. Ces corps étant abandonnés sans vitesse initiale, on demande quel mouvement ils prendront et quelle sera l'accélération de ce mouvement.

Descriptive.

Un cylindre circulaire droit de 2 centimètres de rayon et de 5 centimètres de hauteur, repose par l'une de ses bases sur le plan horizontal; le centre de sa base est à 5 centimètres en avant de la ligne de terre : le corps est éclairé par un point lumineux situé sur la génératrice la plus éloignée du plan vertical, à 8 centimètres au-dessus du plan horizontal. On demande l'ombre portée par le cylindre sur le plan horizontal et sur le plan vertical.

TOULOUSE

1. — On donne, dans un même plan, une droite indéfinie AB et deux points M, N, situés hors de cette droite, et l'on demande de trouver sur AB un point P tel que la somme de ses distances aux deux points M et N soit égale à une longueur donnée K.

Parmi toutes les valeurs qu'on peut attribuer à K, quelle est celle qui est minimum?

On résoudra le problème soit en y appliquant le calcul algébrique, soit en y employant la géométrie pure.

2. — On considérera en second lieu le cas où la droite AB et les points M, N ne seraient pas situés dans un même plan, et l'on montrera comment on peut résoudre le même problème en ramenant le nouveau cas au premier.

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR 1878.

Maximum ou minimum de $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, x étant compris entre 0 et 45°.

— Un arc de 1° 1′ est égal à 1 mètre; calculer le rayon à 1 centimètre près.

— Lorsqu'une fraction irréductible donne lieu à une fraction périodique simple, toute fraction irréductible de même dénominateur donne le même nombre de chiffres à la période.

— Deux mobiles se meuvent à partir du point O sur l'axe OX, d'un mouvement uniforme, avec des vitesses v et v'. Un point P est donné sur OY, perpendiculaire à OX. Au bout de combien de temps verra-t-on la distance des deux mobiles sous l'angle maximum? — Trouver la condition pour que le maximum soit de 45°.

— Dans un triangle on connaît A, et l'on a la relation $\sin_2 A = \sin B \sin C$. Calculer les angles de ce triangle.

— Dans un triangle équilatéral ABC, mener une sécante MN parallèle à BC, de manière que $\frac{1}{BM} + \frac{1}{MN} + \frac{1}{CN} = \frac{1}{K}$.

— On connaît deux nombres A et B, et leur plus grand commun diviseur D. Trouver le plus petit nombre par lequel il faut multiplier A pour que le produit soit divisible par B.

— Trouver les conditions qui doivent exister entre les coefficients du polynôme du quatrième degré, pour que l'on puisse le décomposer en une différence de deux carrés, de la forme

$$(x^2 + px + q)^2 - K^2x^2.$$

— Dans une demi-circonférence AB, on mène une corde AC fixe; trouver sur cette droite AC un point D tel que si l'on mène DE parallèle à AB, et rencontrant la circonférence en E, on ait DE = AD; — 2° Déterminer le point D de manière que le rapport de DA à DE soit égal à une quantité donnée; — 3° Trouver le maximum de la somme AD + DE.

— Maximum de $\cos x\,(\sin(\alpha - x) + \sin x)$.

— Résoudre un triangle connaissant l'angle A, la somme $b + c = 2s$, et sachant que l'on a $a^2 = bc$. Discuter.

— Trouver les angles d'un triangle, connaissant l'angle A et sachant que l'on a $2a = b + c$.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE SAINT-CYR.

Un nombre est formé par le produit de trois nombres entiers consécutifs, et la somme des quotients que l'on obtient en divisant ce nombre par chacun de ses facteurs est 47. Trouver ce nombre.

— Étant donnée une ligne de longueur a, on en prend le milieu et on la prolonge. Trouver la longueur de la partie prolongée, de telle manière que le rectangle ayant pour dimensions la moitié de la ligne donnée et l'autre moitié augmentée de la partie prolongée, soit équivalent au carré de la partie prolongée.

— Trouver deux nombres dont la somme soit égale à 9 fois la différence et dont le produit diminué du plus grand nombre, soit 12 fois le quotient du plus grand nombre par le plus petit.

— Trouver un nombre tel que son carré augmenté de son cube donne une somme égale à 9 fois le nombre suivant.

— Résoudre l'équation $\dfrac{x^2}{x^2 - a^2} + \dfrac{x^2}{x^2 - b^2} = 4$ et faire voir que les racines sont toujours réelles, quelle que soit la valeur que l'on donne à a et à b.

— Étant donné un triangle rectangle ABC, chercher sur le côté AB de l'angle droit un point M, tel que l'on ait $AM^2 + BM^2 + CM^2 = K^2$.

— On donne les dimensions d'un rectangle ABCD; on prolonge le côté BC, et on demande où il faudra prendre sur ce prolongemont un point M, pour que la somme des deux triangles ADN, MCN soit égale à une quantité donnée.

— Un demi-cercle étant donné, on demande de mener du point A une corde AN, telle que, en abaissant une perpendiculaire MN de l'extrémité N de la corde sur le diamètre AB, la somme AN + MN soit égale à une ligne donnée.

— On donne un cercle et deux points P et P' sur un de ses diamètres.

On demande de mener du point P une sécante PCD, telle que la surface du triangle DCP soit maxima ou minima.

— Mener dans une circonférence une corde, telle que la somme de la corde et de sa distance au centre soit maxima.

— On donne une circonférence, deux tangentes parallèles, et un point P sur le diamètre de contact. Mener une troisième tangente telle que la partie interceptée soit vue du point P sous un angle maximum.

— Sur une demi-circonférence, trouver un point M tel que si l'on abaisse une perpendiculaire MP sur le diamètre AB, la somme AP + MP soit maxima.

— On donne deux circonférences tangentes intérieurement. Trouver sur la petite circonférence un point P tel que si l'on mène PM perpendiculaire au diamètre de contact et qu'on prolonge cette ligne jusqu'en N où elle rencontre la grande circonférence, $NP^2 + MN^2$ soit maximum.

— Soit donnée une demi-circonférence, on demande de trouver une droite CD parallèle à AB et qui soit vue du point P milieu de OB sous un angle droit.

— Dans un triangle, mener à la base une parallèle qui soit vue sous un angle droit du milieu de la base.

— On a sur une droite les points A, B, C, D, qui sont équidistants; on demande de trouver sur cette droite un point M, tel que $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = K^2$.

— On demande sur la demi-circonférence AMA′ un point M, tel que $2MA' + 3MA$ soit minima.

— Soit un triangle rectangle ABC; on donne $AC - AB = d$, $CD - BD = d'$; calculer les côtés x et y de l'angle droit. D est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet A sur l'hypoténuse.

— Soit un demi-cercle AMD et un point M de la demi-circonférence; joignons le point M au point A et menons MC parallèle au diamètre AD, jusqu'à la seconde rencontre en C avec la demi-circonférence. Pour quelle position de M la somme MA + MC est-elle maximum ou minimum?

— On considère un demi-cercle, le diamètre AB et la corde AC issue de l'extrémité A. Quelle doit être la position de la corde pour que la somme de la corde et de sa projection sur le diamètre soit maxima.

— On considère un demi-cercle et une corde CD parallèle au diamètre. Déterminer le point C de telle manière que $AC = K.CD$.

— Etant donnés sur une droite indéfinie trois points A, B, C, trouver sur cette droite un quatrième point M, tel que l'on ait $MB^2 = MA.MC$.

— Mener dans un demi-cercle trois cordes consécutives dont une parallèle au diamètre et les autres passant par les extrémités de ce diamètre, de manière que la somme des carrés des cordes soit égale à l^2.

— Couper une sphère par un plan, de manière que le cône qui a pour base la section et pour sommet le centre de la sphère, soit équivalent au segment sphérique à une base qui le surmonte.

— Mener dans une demi-circonférence une corde parallèle au diamètre, de façon que la somme des carrés de cette corde et de celle qui en joint une extrémité à l'extrémité du diamètre, soit donnée. Discussion.

— Mener dans un cercle une corde, telle que la somme de cette corde et de la flèche (portion du rayon perpendiculaire comprise entre l'arc et la corde) soit maxima.

— Diviser un cercle en moyenne et extrême raison par un cercle concentrique.

— Diviser un triangle en moyenne et extrême raison par une parallèle à la base.

— Diviser un trapèze en moyenne et extrême raison par une parallèle aux bases.

— Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et sachant que le volume engendré par ce triangle tournant autour d'un des côtés de l'angle droit est égal au double du volume engendré par le même triangle tournant autour de l'autre côté de l'angle droit.

— Etant donnés un cercle et deux diamètres rectangulaires AB, CH, mener une corde DE parallèle au diamètre AB, de manière que le volume du cylindre engendré par le rectangle DEFG tournant autour du diamètre AB, soit égal à celui du solide engendré par le triangle DCE tournant autour du même diamètre.

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le **Dr Henri Suter**, de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon.

(*Suite*, voir page 199)

LA SCIENCE CHEZ LES GRECS.

Son importation. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie.

Avant d'arriver à Platon et à Aristote, qui ouvrent une ère nouvelle aux mathématiques et aux sciences de la nature, nous allons jeter un coup d'œil en arrière sur le mouvement scientifique des deux siècles écoulés.

Cette période se caractérise surtout par des inventions et des progrès isolés, par l'absence de toute coordination dans le développement des sciences; par le manque d'une méthode généralement admise dans les sciences abstraites, et d'un système spécial approprié aux sciences appliquées. Les mathématiciens de ce temps étaient, par suite de leurs vues philosophiques, trop éloignés les uns des autres, leurs idées et leurs conclusions divergeaient en des sens trop divers pour qu'il fût aisé alors d'embrasser d'un coup d'œil le sujet entier des sciences et de leur appliquer une même méthode. — Lorsque les écoles philosophiques se rappro-

chèrent davantage, lorsque Platon et Aristote réunirent les matériaux dispersés de nombreux côtés et les mirent en ordre, alors seulement il devint possible de soumettre chaque science à un plan unique. Toutefois, il ne nous est parvenu aucun traité didactique de mathématiques remontant à cette époque : *Hippocrate* doit avoir composé le premier ouvrage de ce genre, mais il a été perdu. Cette dernière circonstance nous rend difficile l'examen de l'ensemble des productions mathématiques depuis *Thalès* jusqu'à *Platon*. Ce que nous connaissons des citations historiques bien courtes et en partie obscures émanant des écrivains grecs, nous permet seulement de croire à la situation élevée à laquelle avaient pu parvenir les sciences à la fin de cette période un peu nuageuse. — Il faut avouer, il est vrai, que le système alors adopté, ainsi que la manière dont les conceptions se produisaient, se formulaient et s'enchaînaient, sont pour nous lettre close.

Toutefois nous voyons que les plus anciens mathématiciens, dans leurs démonstrations et dans leurs questions, ont eu recours à la méthode synthétique, mais il faut dire aussi que les mathématiciens n'ont jamais eu nettement conscience de sa valeur et de ses procédés qui, par le contraste, furent mis en relief lorsque Platon et ses élèves appliquèrent la méthode analytique.

Il est permis d'admettre que la géométrie plane, au temps d'Hippocrate, était arrivée à son entier développement; c'est ce qu'établit avec une certitude suffisante l'extrait que nous donne *Simplicius* de l'histoire de la géométrie d'*Eudème*.

En ce qui concerne la stéréométrie, leurs progrès sont très-lents, et nous ne trouverions rien au delà de la connaissance de cinq réguliers, connaissance déjà acquise par les Égyptiens, ainsi qu'il a été reconnu. — L'arithmétique ne s'élevait pas non plus au delà des spéculations des Pythagoriciens sur les nombres. Du reste, les premiers développements de cette dernière branche sont restés entourés de ténèbres bien plus obscures que pour toute autre branche.

L'astronomie s'agitait malheureusement presque exclusivement dans le champ des spéculations philosophiques. La

recherche de systèmes de l'univers et de l'essence des corps célestes était le seul but poursuivi par les écoles ionienne et pythagoricienne. L'observation rationnelle des phénomènes, qui doit être la véritable base de l'astronomie, leur était encore étrangère ; et elle ne devint en honneur qu'à la suite des efforts déployés par un *Meton* et par un *Euktemon* pour fixer l'évaluation du temps.

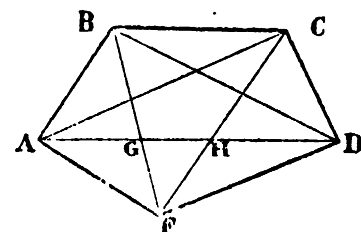
(A suivre.)

QUESTION 53.

Solution par M. Menand, élève du Lycée de Dijon.

Construire un pentagone dans lequel chaque diagonale soit parallèle au côté opposé. (Dellac.)

Soit ABCDE un pentagone remplissant la condition. Les triangles semblables BCE, GHE donnent



$$\frac{GH}{BC} = \frac{EG}{EB}$$

de même les triangles semblables AGE, BCD donnent

$$\frac{AG}{AD} = \frac{EG}{EB}$$

d'où
$$\frac{AG}{AD} = \frac{GH}{BC} = \frac{2AG}{2AD}$$

Par suite
$$\frac{AG}{AD} = \frac{GH + 2AB}{BC + 2AD} = \frac{AD}{BC + 2AD}$$

d'où
$$AG = \frac{\overline{AD}^2}{BC + 2AD}$$

d'autre part
$$AG = AD - BC$$

donc
$$AD - BC = \frac{\overline{AD}^2}{BC + 2AD}$$

alors
$$\overline{BC}^2 = AD(AD - BC)$$

Ainsi, le côté BC est le plus grand segment de la diagonale AD partagée en moyenne et extrême raison. En géné-

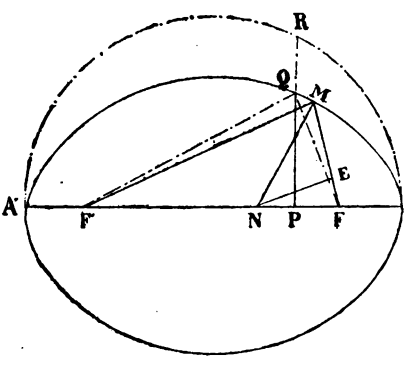
ral, chaque côté du pentagone considéré est le plus grand segment de la diagonale qui lui est parallèle, partagée en moyenne et extrême raison. Pour construire ce pentagone, on donne ses cinq côtés, d'où les cinq diagonales, et par suite on peut construire le pentagone en le divisant en trois triangles.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Hoc, de Longwy; Cordeau, école Lavoisier; J.-B., du lycée de Charlemagne.

QUESTION 106.

Solution par M. Maurice d'Ocagne, élève du Collége Chaptal.

Sur une ellipse donnée, on prend un point M *et l'on mène les rayons vecteurs de ce point* MF, MF'. *A partir du sommet* A *du grand axe, on porte sur le grand axe* AP = MF *et l'on élève en ce point l'ordonnée* PQ. *Cette ordonnée est égale à la normale* MN *du point* M *arrêtée en* N *à l'axe* AA'. (Collignon.)



Évaluons séparément chacune des lignes PQ et MN.

Pour cela posons MF $= f$, MF' $= f'$ et décrivons sur AA' le cercle principal de l'ellipse. PQ prolongé rencontre ce cercle en R. Joignons R au centre O de l'ellipse. On a

$$PR = \sqrt{\overline{RO}^2 - \overline{PO}^2} = \sqrt{a^2 - (f - a)^2} = \sqrt{f(2a - f)}$$

or

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{b}{a}$$

donc

$$PQ = \frac{b \,.\, PR}{a} = \frac{b\sqrt{f(2a - f)}}{a} \,. \quad (1)$$

D'un autre côté MN étant bissectrice de l'angle FMF', on a

$$\frac{NF}{NF'} = \frac{MF}{MF'} \text{ c'est-à-dire } \frac{NF}{2c - NF} = \frac{f}{2a - f}$$

ou
$$\frac{NF}{2c} = \frac{f}{2a}$$

$$\text{d'où } NF = \frac{cf}{a},$$

D'un autre côté

$$\overline{NF}^2 = \overline{MN}^2 + f^2 - 2f\,ME$$

ME étant la projection de MN sur MF. Or la projection de la normale sur chaque rayon vecteur étant constante et égale à $\frac{b^2}{a}$, il vient

$$\frac{c^2 f^2}{a^2} = \overline{MN}^2 + f^2 - \frac{2fb^2}{a}$$

d'où
$$MN = \frac{b\sqrt{f(2a - f)}}{a} \qquad (2)$$

comparant (1) et (2), on en déduit PQ = MN.

On déduit de là un moyen très-simple de mener une tangente à l'ellipse en un point M de cette courbe. Après avoir fait les constructions indiquées dans l'énoncé, on décrit de M comme centre, avec PQ pour rayon, un arc de cercle qui rencontre AA' en N. On joint MN et en M on mène une perpendiculaire à cette droite.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Bonnardos et Menard, de Dijon; Perrin, de Clermont-Ferrand; Lambert, de Dinant; Cordeau, école Lavoisier; Hugentobler, de Boppelsen, (Suisse); Leblanc, de Cherbourg; Dalzon, de Saint-Étienne; Vautré, de Saint-Dié; Choyer, de Poitiers; Hoc, de Longwy; Bassy, de Châteauroux; Demortain, de Doullens; Brasard, collége de Saintes; Reuss, de Belfort; Charzat, à Melun.

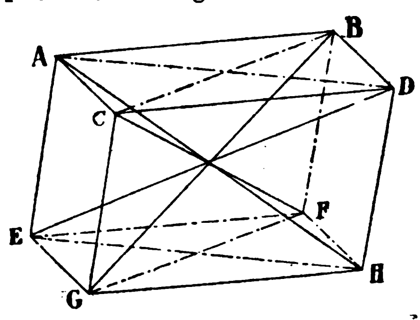
QUESTION 107.

Solution par M. Poullin, élève du Lycée d'Orléans.

Dans tout parallélipipède la somme des carrés des arêtes est égale à la somme des carrés des diagonales.

Soit le parallélipipède ABCDEFGH, dont CF, GB, AH, ED sont les diagonales. Par les arêtes CG, BF d'une part

et AE, DH d'une autre, faisons passer deux plans qui déterminent les parallélogrammes CGFB et AEHD. Dans le premier, les diagonales CF et BG donnent :



$$\overline{CF}^2 + \overline{BG}^2 = \overline{GF}^2 + \overline{FB}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CG}^2 = 2\overline{GF}^2 + 2\overline{CB}^2$$

Dans le second les diagonales AH et ED donnent

$$\overline{AH}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EH}^2 + \overline{DH}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{EH}^2$$

Ajoutant membre à membre ces égalités on a

$$\overline{CF}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{ED}^2 = 2\overline{GF}^2 + 2\overline{CG}^2 + 2\overline{AE}^2 + 2\overline{EH}^2$$
$$= 4\overline{CG}^2 + 2\overline{GF}^2 + 2\overline{EH}^2$$

or dans le parallélogramme EFGH, nous avons

$$\overline{EH}^2 + \overline{GF}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{GH}^2 + \overline{EG}^2 + \overline{FH}^2 = 2\overline{GH}^2 + 2\overline{FH}^2$$

donc

$$\overline{CF}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{ED}^2 = 4(\overline{CG}^2 + \overline{GH}^2 + \overline{FH}^2)$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Notrac, lycée Henri IV; Menand, de Dijon; Lugolle, lycée Saint-Louis; Lerossay, de Liége; Lafarge, de Paris; Bailly, Verlant, Duyster, de Bruxelles; Martin et Reuss, de Belfort; Perrin, de Clermont-Ferrand; Simon, Cordeau, école Lavoisier; Isace, Carrier, collége Sainte-Barbe; Séné, d'Orléans; Tissier, de Châteauroux; Huc, Junck, Fabing, de Longwy; d'Ocagne, collége Chaptal; Lambert, de Dinant; Choyer, de Poitiers; Vautré, de Saint-Dié; Huet, d'Orléans; Jordan, de Montpellier; Laclette, de Pau; Chancogne, de Périgueux; de Montgolfier, école de Passy; Marcellin, de Cherbourg; Bruyand, de Troyes; Dalzon, de Saint-Etienne; Garnier, lycée Saint-Louis; Clavez et Margain, de Lons-le-Saulnier; Demortain, de Doullens; Lambiotte, de Liége; Cottereau, de Châteauroux; Charzat, à Melun.

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 13504-8.

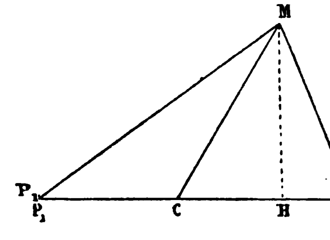
THÉORIE DES AXES RADICAUX

Par **A. Morel.**

§ I. *Puissances.*

I. **Définition.** — Nous appellerons *puissance totale* d'un point M par rapport à des points P_1, P_2, P_3... ayant des coefficients p_1, p_2, p_3..., la somme des produits de chaque coefficient par le carré de la distance du point M au point correspondant. Si le point M est confondu avec le centre O des distances proportionnelles, la puissance s'appelle *puissance intérieure* du système de points considérés.

II. **Théorème.** — *La puissance totale d'un point par rapport à un système de points, est égale à la puissance de ce point par rapport au centre des distances proportionnelles du système de points augmentée de la puissance intérieure de ce système de points.*



Pour démontrer ce théorème, je considérerai d'abord le cas de deux points P_1 et P_2, de coefficients p_1 et p_2; j'aurai, par un théorème connu de géométrie.

$$\overline{MP_1}^2 = \overline{P_1C}^2 + \overline{MC}^2 + 2P_1C \times CH;$$
$$\overline{M_2P}^2 = \overline{P_2C}^2 + \overline{MC}^2 + 2CP_2 \times CH.$$

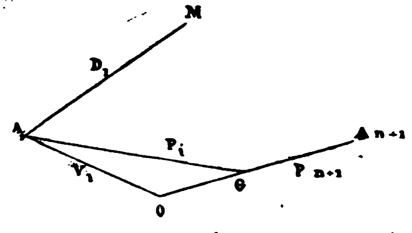
D'où, en multipliant la première égalité par p_1, la seconde par p_2, et en tenant compte de la relation

$$p_1 \times P_1C = p_2 \times CP_2$$

il viendra :

$$p_1 \times \overline{MP_1}^2 + p_2 \times \overline{MP_2}^2 = (p_1 + p_2)\,\overline{MC}^2 + p_1 \times \overline{P_1C}^2 + p^2 \times \overline{P_2C}^2.$$

Je suppose la proposition vraie pour un système de n points, je dis qu'elle sera encore vraie pour un système de n 1 + points.



Soit O le centre des distances proportionnelles du système de n points, dont A_{n+1} ne fait pas partie, et M un point quelconque. On a par hypothèse

$$\Sigma p_i \, d^2_i = \Sigma p_i \, r^2_i + \overline{MO}^2 \, \Sigma p_i \qquad (1)$$

Si maintenant nous considérons le système des points O et A_{n+1}, G étant leur barycentre on a, en vertu du premier cas :

$$\overline{MO}^2 \Sigma p_i + p_{n+1} \, d^2_{n+1} = (p_{n+1} \; \Sigma p_i) \; \overline{MG}^2 + \overline{GO}^2 \; \Sigma p + p_{n+1} \; \rho^2_{n+1} \qquad (2)$$

En appliquant la première équation au point G, on a

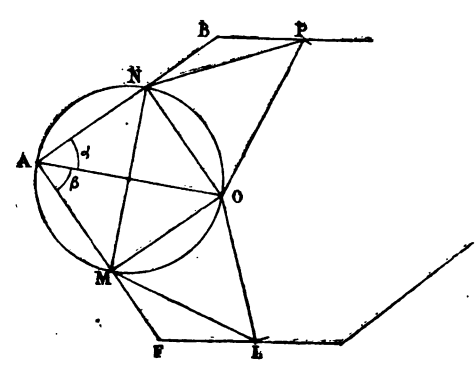
$$\Sigma p_i \; \rho^2_i = \Sigma p_i \; r^2_i + \overline{GO}^2 \; \Sigma p_i \qquad (3)$$

En ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), et tenant compte de l'équation (3), il vient

$$\Sigma p_i \; d^2_i + p_{n+1} \; d^2_{n+1} = \Sigma p_i \; \rho^2_i + p_{n+1} \; \rho^2_{n+1} + (p_{n+1} + \Sigma p_i) - \overline{MG}^2.$$

III. **Corollaire.** — *Le lieu géométrique des points dont la puissance totale par rapport à un système de points est constante est une circonférence ayant pour centre le barycentre des points donnés.*

IV. **Théorème de Steiner.** — *Si d'un point* O *pris dans l'intérieur d'un polygone on abaisse des perpendiculaires sur les côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont les sommets d'un polygone. Si la surface de ce polygone est constante, le point* O *décrit un cercle.*



Soit OA $= a$,

on a $\qquad 2OMN = OM.ON.\sin A.$

Or
$$ON = AO \sin \alpha;\ OM = AO \sin \beta$$
$$AN = AO \cos \alpha;\ AM = AO \cos \beta$$
$$2OMN = a^2 \sin \alpha \sin \beta \sin A;$$
$$2AMN = a^2 \cos \alpha \cos \beta \sin A.$$

Donc

$$2AMN - 2OMN = a^2 \sin A \cos A = \frac{a^2}{2} \sin 2A;$$

et, par suite

$$AMN - OMN = AMON - 2.OMN = \frac{a^2 \sin 2A}{4}.$$

D'où

$$S - 2s = a^2 \frac{\sin 2A}{4} + b^2 \frac{\sin 2B}{4} + c^2 \frac{\sin 2C}{4} + \ldots$$

Par suite, puisque le premier membre est constant, on voit que le lieu du point O est tel que la somme des carrés de ses distances aux sommets, multipliés respectivement par des quantités constantes, est constante. C'est donc un cercle. Le centre du cercle ne change pas quand la surface du polygone pied des perpendiculaires change.

En particulier, *le triangle formé par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'un cercle concentrique au cercle circonscrit à un triangle sur les côtés du triangle a une surface constante.*

On appelle *puissance d'un point par rapport à un cercle* le produit des distances de ce point aux deux points où une sécante quelconque issue du point donné rencontre la circonférence. La puissance est égale en grandeur et en signe au carré de la distance du point au centre, diminué du carré du rayon. — Si le point est extérieur, la puissance est égale au carré de la tangente issue du point. Si le point est intérieur, elle est égale en signe contraire au carré de la demi-corde perpendiculaire au diamètre passant par le point.

On doit observer que la puissance d'un point par rapport à un cercle ne prend pas toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, mais seulement les valeurs comprises entre $-r^2$ et $+\infty$.

V. **Théorème.** — *Le lieu des points* M *dont la somme des puissances à* n *cercles, multipliées respectivement par des facteurs*

constants, soit constante, est un cercle ayant pour centre le centre des distances proportionnelles des centres des circonférenes données, les centres ayant respectivement les coefficients donnés.

En effet, d'après le corollaire du théorème précédent, si je diminue la puissance relative à chacun des points d'une quantité constante, j'aurai encore un cercle, puisque la puissance totale du point considérée sera encore constante. Donc, je puis diminuer la distance MP^2_n d'une quantité r^2_n, et j'aurai alors la puissance du point M par rapport à un cercle de centre P_n et du rayon r_n.

On trouvera alors pour l'expression du rayon OM, d'après le théorème (14):

$$OM^2 \Sigma p_1 + \Pi = \Sigma_1 p_1 \delta_1^2 = K + \Sigma p_1 r_1^2$$

en appelant Π la puissance intérieure du système des centres.

Si l'on avait $\Sigma p_1 = o$, le rayon du cercle augmenterait indéfiniment et le lieu deviendrait une droite. Dans le cas particulier de deux cercles, on arrive donc à ce théorème connu. *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles est une droite, que l'on appelle* l'axe radical *des deux cercles.*

VI. **Du cercle imaginaire de centre réel.** — Lorsque la valeur de OM^2 devient négative, il n'y a aucun point du plan faisant partie du lieu. On dit alors que le lieu est un *cercle imaginaire*, de centre réel.

La notion de cercle imaginaire permet de généraliser les énoncés. « Quand les formules ou relations, qui ont servi à déterminer des points ou des droites relatifs à un cercle et à démontrer quelque proposition, contiennent le rayon du cercle au carré, et non à la première puissance, si l'on suppose ce carré négatif, les expressions subsistent, ainsi que les résultats qui s'y rapportent; c'est-à-dire qu'elles donnent encore naissance à des points et à des droites, et à des propositions y relatives ; mais ces points et ces droites se trouvent différents des premiers, ou plutôt dans des conditions différentes. On dit alors que le cercle que l'on considérait en premier lieu est devenu *imaginaire*, et que les propositions résultant des formules se rapportent à ce

cercle imaginaire. C'est ainsi que l'on agit en géométrie analytique. » (Charles, *Géométrie supérieure*, chap. 33.) — Nous avons vu que la quantité $\delta_1^2 - r_1^2$ subsiste sans qu'on ait besoin de tracer le cercle ; au lieu de cette quantité, on peut aussi bien considérer la quantité $\delta_1^2 + r_1^2$. Pour généraliser on appelle cette quantité la puissance du point par rapport à un cercle de rayon imaginaire $r_1 \sqrt{-1}$.

On peut figurer cette puissance en la considérant comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont δ_1 et r_1. Quand nous aurons besoin de considérer le cercle imaginaire, nous tracerons du sommet de l'angle droit, avec r_1 pour rayon, un cercle pointillé, que nous appellerons le *cercle conjugué de rayon* r_1.

§ II. *Axes radicaux.*

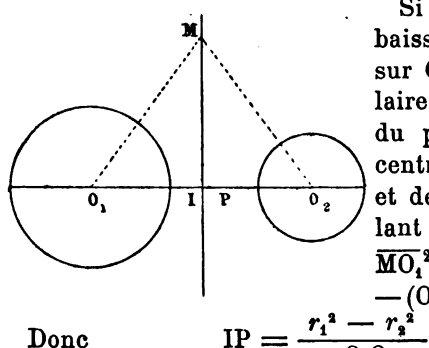
VII. **Axe radical de deux cercles réels.** — *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles* O_1 *et* O_2 *est une droite, perpendiculaire à la ligne des centres.*

En effet, si nous appelons r_1 et r_2 les rayons, nous devons avoir, pour un point M du lieu,

$$\overline{MO_1}^2 - r_1^2 = \overline{MO_2}^2 - r_2^2.$$

D'où

$$\overline{MO_1}^2 - \overline{MO_2}^2 = r_1^2 - r_2^2.$$



Si donc, du point M j'abaisse la perpendiculaire MP sur O_1O_2, cette perpendiculaire sera plus près du centre du petit cercle O_2 que du centre du grand cercle O_1, et de plus j'aurai en appelant I le milieu de O_1O_2 :

$$\overline{MO_1}^2 - \overline{MO_2}^2 = (O_1I + IP)^2 - (O_2I - IP)^2 = 2O_1O_2 \times IP.$$

Donc

$$IP = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2O_1O_2}$$

Le point P est donc fixe sur la ligne O_1O_2. Le lieu est donc la perpendiculaire menée par le point P à droite O_1O_2. Cette droite a été appelée *axe radical* des deux cercles, par Gauthier de Tours.

De ce qui précède il résulte :

1° Que l'axe radical de deux cercles égaux passe par le milieu de la ligne des centres ;

2° Que l'axe radical de deux cercles concentriques s'éloigne à l'infini ;

3° Que, lorsque deux cercles se coupent, l'axe radical est la corde commune indéfiniment prolongée. — On en déduit la construction immédiate de l'axe radical de deux cercles qui se coupent ;

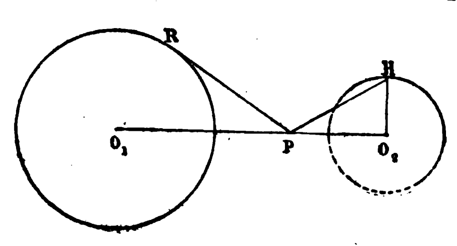
4° Que, lorsque deux cercles sont tangents en un point, l'axe radical se confond avec la tangente commune en ce point.

Si l'on augmente les carrés des rayons de deux cercles d'une même quantité, l'axe radical des nouveaux cercles coïncide avec celui des cercles donnés. On augmente le carré du rayon r_1 d'une quantité t_1^2 en menant au cercle une tangente M_1T_1 de longueur t_1, et décrivant de O_1, comme centre, un cercle de rayon O_1T_1. — Lors donc que les deux cercles ne se couperont pas, on les remplacera par deux autres cercles ayant deux points communs.

L'axe radical de deux cercles passe évidemment par les milieux des tangentes communes aux deux cercles.

La théorie précédente s'applique aux cas où l'un des rayons, ou même tous les deux, peuvent devenir nuls. On a en particulier ce théorème : *L'axe radical d'un cercle et d'un point est à égale distance de ce point et de sa polaire par rapport au cercle.*

VIII. **Axe radical d'un cercle réel et d'un cercle conjugué.** — C'est encore le lieu des points d'égale puissance par rapport au cercle réel et au cercle imaginaire. Ce lieu est encore une droite. En effet, puisque le lieu ne change pas quand on augmente les carrés des rayons des



deux cercles d'une même quantité, si on augmente chacun de ces carrés de r_2^2, on sera ramené à chercher l'axe radical d'un cercle et d'un point.

D'après ce que nous avons dit précédemment (VI) si l'on mène par le centre O_2' du cercle conjugué (*) une perpendiculaire à la ligne des centres, perpendiculaire qui rencontre en H le cercle du rayon r_2 décrit du point O_2' comme centre, et si P est le pied de l'axe radical sur la ligne des centres, on a, en menant la tangente PR au cercle réel : PR = PH. De même en prenant un autre point du lieu, on verrait que ce point est le centre d'un cercle coupant orthogonalement le cercle O_1 et diamétralement le cercle O_2.

IX. **Axe radical de deux cercles conjugués.** — L'axe est réel; il ne change pas quand on augmente le carré du rayon d'une même quantité, et en particulier de $r_1^2 + r_2^2$. On voit alors que l'axe radical de deux cercles conjugués O_1' et O_2' est le même que celui de deux cercles réels, ayant l'un pour centre O_1 et pour rayon r_2, l'autre pour centre O_2 et pour rayon r_1.

X. **Angle de deux cercles.** — Lorsque deux cercles se coupent en un point A, l'angle intérieur du triangle O_1AO_2 est égal à l'angle des tangentes des deux cercles, parcourus dans le même sens de circulation. On a donc

$$\cos A = \frac{r_1^2 + r_2^2 - \overline{O_1O_2}^2}{2r_1r_2}$$

Si les deux cercles ne se coupent pas, la valeur du cosinus toujours réelle, sera supérieure à l'unité en valeur absolue, et l'angle correspondant est imaginaire. Dans ce cas, bien que l'angle A soit imaginaire, on pourra appliquer quand même les formules de trigonométrie. En particulier, on aura toujours par définition $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$$

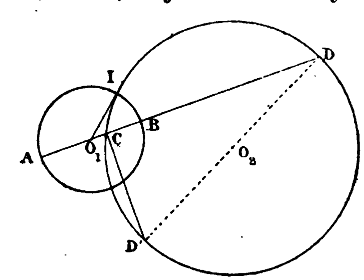
(*) Nous distinguerons les cercles réels et les cercles imaginaires en accentuant la lettre qui désigne ces derniers.

XI. **Des cercles orthogonaux.** — Lorsque deux cercles sont orthogonaux, si l'on mène les rayons d'un point de rencontre, chacun de ces rayons est tangent à l'autre cercle, et on a donc, en appelant r_1 et r_2 les deux rayons la relation, $\overline{O_1O_2}^2 = r_1^2 + r_2^2$

Pour la généralisation des énoncés, on remarquera que tout cercle qui coupe orthogonalement un cercle réel, coupe diamétralement le cercle conjugué de même centre et de même rayon r_1, et inversement; car si un cercle en coupe diamétralement un autre, on a $\overline{O_1O_2}^2 = r_1^2 - r_2^2$, relation qui ne diffère de la précédente que par le changement du signe du carré du rayon. En particulier, on a cette proposition très-importante que *deux cercles concentriques de rayons* r_1 *et* $r_1\sqrt{-1}$ *se coupent orthogonalement.*

XII. **Théorème.** — *Lorsque deux cercles sont orthogonaux, tout diamètre de l'un est divisé harmoniquement par l'autre. — La réciproque est vraie.*

En effet, si je mène le rayon O_1I qui passe par le point d'intersection des deux cercles, on a $\overline{O_1I}^2 = O_1C \times O_1D$, puisque O_1I est tangent au cercle O_2. Or, on sait, le point O_1 étant le milieu de AB, que cette relation indique que les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B.



XIII. **Théorème.**— *Quand deux cercles sont othogonaux, la polaire d'un point de l'un d'eux par rapport à l'autre, passe par le point du premier qui est diamétralement opposé au point considéré.*

En effet, si je joins le point C au point D' diamétralement opposé au point D, l'angle DCD' est droit, et comme on a $r_1^2 = O_1C \times O_1D$, le point C est le pied de la polaire du point D. Donc la ligne CD' se confond avec cette polaire.

XIV. **Corollaire.**— *Le lieu des points tels que leurs polaires par rapport à trois cercles passent par un même point est le*

cercle orthogonal à ces trois cercles. Ce cercle orthogonal est aussi le lieu du point de rencontre des trois polaires.

Car si je considère un cercle ayant pour diamètre la ligne qui joint le point donné D au point de concours des polaires, il passera par les conjugués harmoniques du point D, par rapport aux extrémités du diamètre dirigé vers le point D dans chaque circonférence, donc il coupera cette circonférence à angle droit. (*A suivre.*)

DES PROJECTIONS EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Par M. **Pillet** (*suite*).

PROJECTIONS CONIQUES

Ce système de projections a en général l'inconvénient de ne pas conserver les rapports des longueurs, mais il est avantageux de l'employer dans certains cas particuliers. La projection conique d'un corps sur un plan n'est autre chose qu'une perspective de ce corps sur le plan qu'on nomme « plan du tableau ».

Dans les problèmes de projections coniques, on aura besoin de résoudre les deux questions suivantes :

1° Les projections orthogonales d'un point étant données, ainsi que le sommet du cône des projetantes, trouver la projection conique du point sur le plan horizontal.

Cette projection conique est la trace sur le plan du tableau, d'une projetante passant par le sommet donné et par le point donné.

2° La projection conique d'un point et le sommet du cône des projetantes étant donnés, trouver les projections orthogonales de ce point, sachant qu'il appartient à une droite dont les projections orthogonales sont connues.

REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

Point et droite.

1° Tout point du plan de projection est à lui-même sa projection conique;

2° Tout point dans la projetante qui est parallèle au plan de projection se projette à l'infini;

3° Toute ligne droite a pour perspective une ligne droite;

4° Toute droite passant par le sommet du cône des projetantes, se projette tout entière en un point qui est sa trace sur le plan du tableau;

Il en résulte qu'un cône se projette tout entier suivant sa trace sur le plan du tableau, si son sommet coïncide avec le sommet du cône des projetantes.

5° Toute figure parallèle au plan de projection se projette suivant une figure semblable;

6° Les projections coniques de deux droites parallèles ne sont pas parallèles, à moins qu'elles ne soient elles-mêmes parallèles au plan de projection.

Plan.

Un plan sera déterminé par les projections coniques de deux ou plusieurs de ses droites.

Lorsqu'un plan passe par le sommet du cône des projetantes, sa projection conique se fait tout entière suivant une droite, qui est sa trace sur le plan du tableau.

Il en résulte que toute figure de ce plan se projettera sur sa trace.

Applications.

I. — Intersection d'un octaèdre régulier et d'un cône..

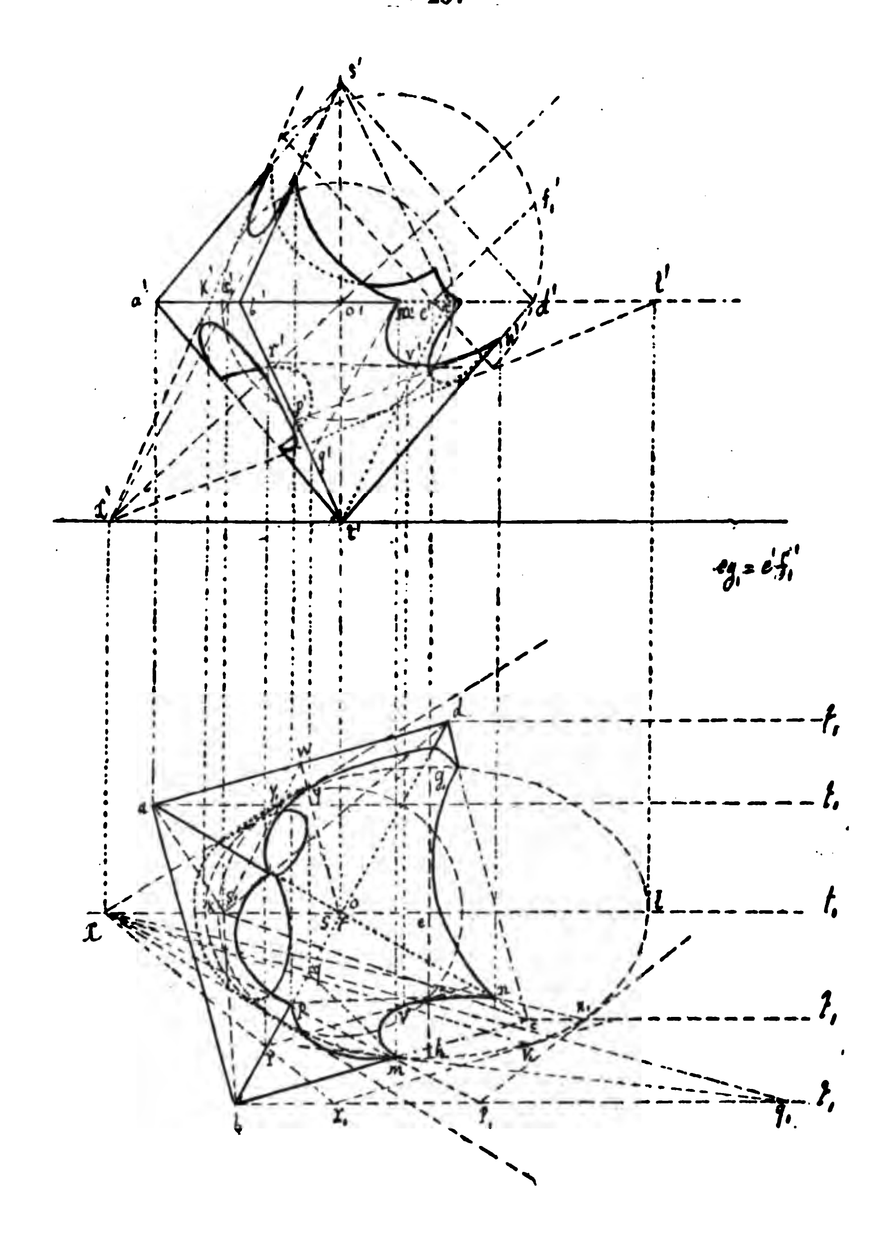
Le cône a son sommet sur le plan horizontal, dans le plan vertical qui contient le centre de l'octaèdre. Il est circonscrit à une sphère qui a même centre que l'octaèdre.

Je prends pour plan du tableau le plan contenant le carré de base commune aux deux pyramides qui forment l'octaèdre et pour sommet du cône des projetantes le sommet du cône donné xx'.

Je cherche la trace du cône sur le plan du tableau par une construction connue. J'obtiens une ellipse de grand axe l_1k_1, et de petit axe g_1h_1.

Je cherche la projection conique de l'octaèdre.

Le carré *abcd*, *a'b'c'd'* est à lui-même sa projection conique; le sommet supérieur ss' de l'octaèdre a pour projections


s'
a'
b'
o'
m'
c'
d'
l'
f₁'
r'
v'
q'
x'
t'
eg₁ = e'f₁'
d
a
w
x
l
o
e
n
m
h
k
b
x₁
p₁
q₁
t₁

coniques, et le sommet inférieur *tt'*, qui est dans le même plan horizontal que le sommet du cône, a sa projection oblique située à l'infini, c'est-à-dire que les arêtes issues de ce sommet ont des projections coniques parallèles à la ligne de terre.

Si je considère la projection t_1cb de la face *tcb* de l'octaèdre, et l'arc d'ellipse mv_1n_1 compris dans l'intérieur, cet arc d'ellipse est la projection conique de la portion de l'intersection comprise dans la face *tcb*.

Le point *m*, qui est dans le plan de projection, est à lui-même sa projection conique; le point n_1 se relève en *n* sur l'arête *tc*.

Pour relever la tangente au point m_1 de la courbe, je mène à l'arc d'ellipse mv_1n_1 la tangente mq_1. Cette droite est la projection conique de la tangente *mq* à la courbe de l'espace. Le point q_1, situé sur bt_1, projection conique de *bt*, se relève par une projetante inverse en *q* sur l'arête *bt*; *mq*, *m'q'* est la tangente cherchée.

Pour relever un point quelconque de la courbe, je fais passer une droite par la projection oblique de ce point, je relève cette droite, et le point se relèvera sur sa projection orthogonale. Mais il est préférable de relever du même coup un point et sa tangente.

Je vais, par exemple, relever le point dont la tangente sera sur l'épure parallèle à *bc*; *bc* de l'espace étant dans le plan de projection, toute droite qui lui sera parallèle aura sa projection conique parallèle à la sienne. Je prends donc la tangente r_1v_1 parallèle à *bc*; elle se relève en *rv* parallèle à *bc*, et le point v_1 se relève en *r*.

Ceci suffit pour faire comprendre comment on résoudrait les questions suivantes :

1° Trouver les points le plus haut ou le plus bas des diverses courbes;

2° Trouver les points le plus à gauche, le plus à droite de ces courbes;

3° Trouver les points où le contour apparent du cône est tangent aux courbes;

4° Trouver les points de ces courbes pour lesquels la tan-

gente passe par un point donné sur l'une ou l'autre des deux projections.

II. — Application aux ombres au flambeau. Soit à trouver l'ombre portée par une surface sur un polyèdre. Le problème revient :

1° A circonscrire à la surface un cône ayant pour sommet le point lumineux;

2° A chercher son intersection avec le polyèdre. On cherchera l'ombre portée par la surface et le polyèdre sur un plan auxiliaire, le plan horizontal par exemple. L'ombre portée par la surface fournira une courbe analogue à l'ellipse précédente; l'ombre portée par le polyèdre donnera une perspective de ce polyèdre, et en raisonnant comme ci-dessus, on remontera par des rayons lumineux inverses, au lieu de projetantes inverses, des points de l'ombre portée sur le plan horizontal aux points de l'ombre portée par la surface sur le polyèdre.

NOTE D'ARITHMÉTIQUE

LIMITE DE L'ERREUR QUE L'ON COMMET EN SUBSTITUANT, DANS UN CALCUL, LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE DE DEUX NOMBRES A LEUR MOYENNE GÉOMÉTRIQUE *.

Par **Georges Dostor.**

1. Soient a et A deux nombres inégaux, on a l'identité évidente

$$\mathrm{A}a = \left(\frac{\mathrm{A}+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{A}-a}{2}\right)^2.$$

On en tire
$$\mathrm{A}a < \left(\frac{\mathrm{A}+a}{2}\right)^2,$$

et, en extrayant la racine carrée,

$$\sqrt{\mathrm{A}a} < \frac{\mathrm{A}+a}{2}.$$

* *N. Annales*, 1851, page 88.

On en conclut que *la moyenne géométrique de deux nombres différents est plus petite que la moyenne arithmétique de ces deux nombres.*

2. Appelons e l'excès de la moyenne arithmétique des deux nombres a et A sur leur moyenne géométrique. Nous avons

$$e = \frac{A + a}{2} - \sqrt{A\,a}.$$

On devrait poursuivre ainsi :

Multipliant et divisant par la somme des mêmes quantités, on obtient

$$e = \frac{A^2 + 2Aa + a^2 - 4Aa}{4\left[\frac{A+a}{2} + \sqrt{Aa}\right]} = \frac{(A-a)^2}{4\left[\frac{A+a}{2} + \sqrt{Aa}\right]};$$

mais $\frac{A+a}{2} > a$ et $\sqrt{Aa} > \sqrt{a^2}$; $> a$

donc $e < \frac{(A-a)^2}{8a}$,

donc :

Remplaçant A par $a + d$ et transposant le terme négatif, on trouve que $e + \sqrt{(a+d)a} = a + \frac{d}{2}$.

Élevant au carré, on obtient

$$e^2 + 2e\sqrt{(a+d)a} + a^2 + ad = a^2 + ad + \frac{d^2}{4},$$

puis, en réduisant $e^2 + 2e\sqrt{(a+d)a} = \frac{d^2}{4}$.

Négligeant e^2 dans le premier nombre, nous pouvons écrire

$$2e\sqrt{(a+d)a} < \frac{d^2}{4},$$

d'où nous tirons

$$e < \frac{d^2}{8\sqrt{(a+d)a}}.$$

Si nous rendons le radical plus petit, en y remplaçant $a + d$ par a, la fraction du second membre deviendra plus grande. Nous aurons donc, à plus forte raison

$$e < \frac{d^2}{8\sqrt{a^2}} = \frac{d^2}{8a},$$

ou bien

$$e < \frac{(A-a)^2}{8a}.$$

Ainsi *l'erreur que l'on commet, en remplaçant la moyenne géométrique de deux nombres inégaux par leur moyenne arithmétique, est moindre que le carré de la différence entre les deux nombres, divisé par l'octuple du plus petit de ces nombres.*

DÉMONSTRATIONS
DES
FORMULES FONDAMENTALES DE LA TRIGONOMÉTRIE

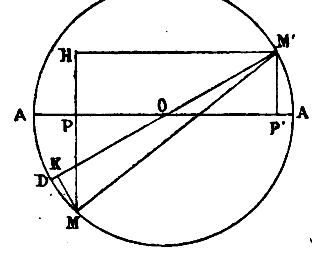
Par M. **Fajon**, professeur de Mathématiques au Lycée de Besançon.

Connaissant les sinus et cosinus de deux arcs, trouver les sinus et cosinus de la somme et de la différence de ces arcs.

Soit x et y deux arcs quelconques, positifs ou négatifs, ayant leur origine commune en A et leurs extrémités en M et M'. On a : $x = 2n\pi + \mathrm{AM}$, $y = 2n'\pi + \mathrm{AM'}$,

$x - y = 2(n - n')\pi \pm \mathrm{MM'}$,

AM et AM' étant positifs.



Abaissons MP, M'P' perpendiculaires sur AB, M'H perpendiculaire sur la plus grande des deux MP et enfin MK perpendiculaire sur le diamètre M'C.

Le triangle rectangle MM'H donne :

$$\overline{\mathrm{MM'}}^2 = \overline{\mathrm{MH}}^2 + \overline{\mathrm{M'H}}^2$$

et d'un autre côté $\overline{\mathrm{MM'}}^2 = \mathrm{M'D} \times \mathrm{M'K}$

on en conclut : $\overline{\mathrm{MH}}^2 + \overline{\mathrm{M'H}}^2 = \mathrm{M'D} \times \mathrm{M'K}$

or, on a dans tous les cas :

$$\overline{\mathrm{MH}}^2 = (\sin x - \sin y)^2,\ \overline{\mathrm{M'H}}^2 = (\cos x - \cos y)^2,$$

$$\mathrm{M'K} = 1 - \cos(x - y).$$

En substituant, l'égalité précédente deviendra :

$$(\sin x - \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2 = 2\,\{1 - \cos(x - y)\}$$

Développant et réduisant, on aura :

$$2 - 2 (\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 2 - 2 . \cos (x - y)$$

D'où l'on conclut la formule :

$$\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

et de celle-ci, on déduira successivement par un calcul bien connu,

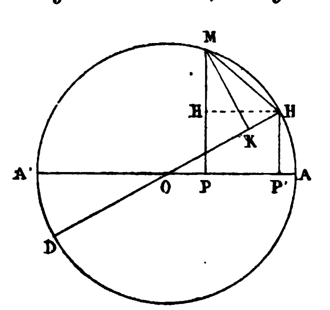
$$\sin (x - y), \sin (x + y) \text{ et } \cos (x + y).$$

Remarque. — Il est facile de démontrer qu'on a dans tous les cas

$$\overline{MH}^2 = (\sin x - \sin y)^2, \overline{M'H'}^2 = (\cos x - \cos y)^2,$$
$$M'K = 1 - \cos (x - y).$$

On a, en effet,

$$\sin x = \pm MP, \cos x = \pm OP \qquad \cos (x - y) = \pm OK$$
$$\sin y = \pm M'P', \cos y = \pm OP'$$



Si $\sin x$ et $\sin y$ ont même signe, ce qui a lieu lorsque M et M' sont tous deux au-dessus ou tous deux au-dessous de AB, H tombe sur MP, et l'on a :

$$\sin x - \sin y = \pm (MP - M'P') = \pm MH.$$

Si $\sin x$ et $\sin y$ ont des signes contraires, ce qui arrive lorsque M et M' sont de part et d'autre de AB, H tombe sur le prolongement de MP et l'on a :

$$\sin x - \sin y = \pm (MP + M'P') = \pm MH.$$

On a donc, dans tous les cas : $(\sin x - \sin y)^2 = \overline{MH}^2$.

On établirait de même la généralité de la valeur de $\overline{M'H'}^2$.

Quant à M'K, le point K tombe sur OM' ou sur OD. Dans le premier cas, on a :

$$M'K = OM' - OK = 1 - \cos (x - y)$$

et dans le second cas,

$$M'K = OM' + OK = OM' - (-OK) = 1 - \cos (x - y)$$

Note de la Rédaction. — Cette démonstration est simple et générale, mais nous préférons cependant pour l'enseignement des classes élémentaires la méthode habituelle, qui est évi-

demment celle d'invention. Elle est naturelle et la mémoire par cela même, s'en charge facilement. On peut lui reprocher d'exiger une généralisation un peu laborieuse, toutefois ce travail de généralisation est facile et il offre aux élèves un excellent exercice. J. B.

CONCOURS ACADÉMIQUES DIVERS

GRENOBLE 1872.

1° Théorème de Simson.

2° Trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles tangentes à trois droites données.

3° Tróuver quelle est la parabole tangente aux trois côtés d'un triangle équilatéral dont le paramètre soit maximum.

CAEN 1873.

On donne un cercle et deux tangentes rectangulaires. Mener une troisième tangente formant avec les deux premières un triangle de surface donnée. Discussion.

Inscrire et circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire. Calculer les rayons des sphères :

1° Dans le cas de la pyramide triangulaire régulière;

2° Dans le cas du tétraèdre régulier.

POITIERS 1873.

1. — Un triangle A'BC variable de grandeur mais qui reste toujours semblable à un triangle donné tourne autour de l'un de ses sommets A, tandis qu'un second sommet B décrit une droite fixe MN. — Trouver le lieu décrit par le troisième sommet C.

2. — Combien y a-t-il de nombres divisibles par B, dans la suite

A, 2A, 3A......AB?

A et B étant des nombres entiers quelconques.

POITIERS 1874.

1. — Les arêtes opposées d'un tétraèdre sont égales. — On joint les milieux des arêtes opposées. — Démontrer que :

1° La figure ainsi formée est trièdre trirectangle.

2° La somme des carrés d'une quelconque des faces est égale au double de la somme des carrés des lignes obtenues en joignant les milieux des arêtes opposées.

3° La somme des carrés de deux côtés d'une face quelconque est égale au double carré de la ligne qui joint les milieux des arêtes du troisième couple plus le carré d'une de ces arêtes.

2. — Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle en A, connaissant la hauteur h abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse. Et le rayon du cercle ex-inscrit compris entre les côtés A et C de l'angle B. — Discussion — Construction.

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR 1878.

(*Suite*, voir page 248)

— On donne un triangle équilatéral ABC. Sur le prolongement de AC on prend un point P que l'on joint à un point M pris sur AB et on mène la parallèle MN à AC. Déterminer M de façon que PM = MN. Discussion.

— Résoudre un triangle connaissant l'angle A et les rayons r et R des cercles inscrit et circonscrit.

— On donne un cercle dans lequel on inscrit BC $= r$ et l'on prend sur le diamètre AB un point P que l'on joint au point C.

Calculer l'angle CPB $= x$. Est-il possible de placer P entre O et A pour que CPB $= 45°$.

Sera-t-il plus près de O que de A?

— Dans un triangle rectangle en A, on mène la hauteur AH, puis les bissectrices HO, HI des angles droits en H. On mène encore la bissectrice AD de l'angle droit A. Si l'on joint DI, DO, la figure ODIA est un carré.

— Un demi-cercle et une tangente CD rencontrant le diamètre en D tournent autour d'un diamètre AB. Trouver le rapport des surfaces engendrées par l'arc CMA et la tangente DC.

— On a un triangle ABC. On prolonge la base BC, et d'un point P pris sur cette base on mène une ligne MP rencontrant AC en M, puis par M, une parallèle MN à BC. Comment faut-il mener PM pour que le triangle AMN soit égal au triangle MCP.

— On donne deux parallèles AB, CD et la perpendiculaire commune CA. On mène la sécante MN et on prend un point D au milieu de AC. Chercher la valeur de l'angle a que doit faire MN avec une des parallèles pour que cette droite soit vue de D sous un angle droit.

Discussion. — Le problème est-il toujours possible?

— Un rectangle ABCD tourne autour du côté BC. On demande de mener par le sommet B une droite BE telle que le volume engendré par le triangle ABE égale un tiers du volume engendré par le trapèze BCDE.

— Un rectangle ABCD tourne autour du côté BC. Mener par le milieu M de AB une droite ME telle que le volume engendré par le triangle AME égal un cinquième du volume engendré par le pentagone MEDCB.

— Etant donné un triangle isocèle ABC, on prolonge un des côtés égaux AB, et sur la base BC on prend un point P. Par ce point on élève une perpendiculaire BMN, rencontrant AC en M et AB en N. Déterminer la position de P pour laquelle MPC + AMN soit égale à un carré donné.

— On donne un triangle ABC. On mène MN parallèle à la base BC. On

joint B à N. Déterminer MN, de manière que le triangle MBN ait une surface donnée. On prend un point D sur la base BC prolongée et on le joint à M et à N. Déterminer MN pour que le triangle DMN ait une surface donnée.

— Trois cercles O, O′, O″ sont donnés, dont l'un O″ tangent aux deux autres. Démontrer que la corde de contact va passer par le centre de similitude D des cercles O et O′.

— Calculer le rayon de la terre à 1 kilom. près.

— Un bassin a une capacité de $18^{mc},35$. Une fontaine verse en une heure $2^{hl},8^{l}$. Combien mettra-t-elle de temps pour remplir le bassin?

— Résoudre un triangle connaissant les angles et la somme de deux côtés.

— On donne une demi-circonférence de diamètre AB. Mener une corde CD parallèle à AB de manière que le quadrilatère ABCD soit circonscriptible.

— La superficie d'un terrain vaut 7 ares, 6 centiares. Trouver à $0^{m},01$ près le côté du carré équivalent.

— On donne un triangle ABC; on prolonge la base BC d'une quantité égale BD. On mène une parallèle MN à BC et on joint M à D. Déterminer MN pour que la somme des surfaces des triangles BMD et AMN soit la plus petite possible.

— On donne un angle droit BAC et un point P dans l'intérieur. Sur AB et AC on prend deux longueurs égales AE = AD. Quelle doit être la longueur AE = AD pour que le triangle DEP ait une surface maximum?

— Etant donné un angle CAB et un point P intérieur à cet angle, déterminer sur le côté AB un point également distant de P et du côté AC.

— AB est le diamètre d'une circonférence, C un point sur ce diamètre prolongé. Trouver sur la demi-circonférence un point M tel qu'en menant ME perpendiculaire au diamètre et MD perpendiculaire à la perpendiculaire élevée de C sur AB, on ait MD = ME.

— De la valeur de $\cos^2 \frac{A}{2}$ en fonction des trois côtés déduire $\sin^2 \frac{A}{2}$.

— Dans le trinome $3x^2 - 5ax + 1$ déterminer a de manière que ce trinome soit un carré parfait.

— Calculer à 0,01 près l'expression $\frac{18}{\sqrt{2}+1}$.

— Démontrer que les restes de la division par 11 des puissances successives d'un nombre se reproduisent périodiquement.

— On donne le rayon d'un cercle à 0,01 près. Calculer la circonférence avec toute l'approximation possible.

— Le rayon exact d'un cercle est 4,325. Calculer sa surface à un centimètre carré près.

— On a un lingot d'argent au titre de 0,950. Combien faut-il ajouter de cuivre pour le ramener au titre de 0,900.

— Calculer $\sqrt{\frac{2}{81}}$ à 0,01 près.

— Après avoir payé les frais de succession à 9 0/0, on touche pour le montant d'un héritage 60,550 francs. Quelle était la valeur primitive de cet héritage?

— Calculer $x = 18\sqrt{3}$ à 0,001 près.

— Le côté d'un carré est 48527 mètres à 1 mètre près. Sur quelle approximation peut-on compter pour la surface?

— Cube de π à 0,01 près. Combien faut-il prendre de chiffres exacts à π?

— Un capital de 5550 francs est devenu au bout de 3 ans 6000 francs. Quel est le taux du placement (intérêts simples — intérêts composés)?

— Un nombre est connu avec 3 chiffres. Combien doit-on prendre de décimales au logarithme?

— Calculer à $\frac{1}{1000}$ la valeur de

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

— Etant donnés le rayon et l'apothème d'un cône, calculer l'angle du secteur formé par le développement de la surface latérale ($r = 0,126$; $a = 0,7$).

— Dans une circonférence l'arc de 20° vaut 1 mètre. Calculer le rayon à 0,001 près.

— Inscrire un carré dans un triangle.

— Etant donnés un cercle et une droite, mener une corde parallèle à la droite, de telle sorte qu'en abaissant des extrémités de la corde des perpendiculaires sur la droite, on forme un carré.

— Etant donnés un angle et un point P à l'intérieur, mener une droite MN perpendiculaire au côté AB, de telle sorte que le triangle MNP ait une surface donnée.

— Etant donné un rectangle ABCD, déterminer sur le côté BC un point M tel qu'en le joignant au sommet A, et en faisant tourner la figure autour de AD parallèle à BC, on ait surf. AM = surf. MC.

— Un trapèze ABCD est circonscriptible à une circonférence. On connaît les bases et le rayon du cercle inscrit. Calculer les angles.

— Si l'on cherche le plus grand commun diviseur entre mA et mB, fera-t-on le même nombre de divisions que pour trouver le plus grand commun diviseur entre A et B?

— Une circonférence de cercle vaut 30^m. Calculer le rayon à 0,001 près.

— Étant donné l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ former une nouvelle équation du second degré ayant pour racines les carrés des racines de la première.

— La surface d'un carré est 12 h. 8 a. 6 c. Calculer le côté à 1 mètre près.

— Une circonférence a 50 mètres. Calculer le rayon à 0,01 près.

— On donne une demi-circonférence de diamètre AB et une corde AC; déterminer sur l'arc CB un point M tel qu'en le joignant aux points A, B et C, les deux triangles ACM, AMB soient équivalents.

— On donne une demi-circonférence de diamètre AB et un rayon OH perpendiculaire à AB. Déterminer sur l'arc HB un point M tel que si l'on fait tourner la figure autour de AB, on ait surface OM = zone MH.

— Une personne a acheté 28 mètres d'étoffe. Elle a payé comptant et a eu 6 o/o d'escompte. Elle a alors payé en tout 312 fr. 25. Quel était le prix du mètre?

Étant donné un triangle rectangle, mener par le sommet de l'angle droit une droite telle que la somme des surfaces engendrées par les côtés de l'angle droit, en tournant autour de cette droite, soit maximum.

— Limite de $\frac{2}{7} + \frac{4}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \frac{2}{7^5} + \frac{4}{7^6} \dots$

— Déterminer a de manière que $x^4 + 1$ soit divisible par $x^2 + ax + 1$.

On donne un rectangle ABCD. Sur le côté AB déterminer un point M tel qu'en le joignant au sommet D on ait DM = 3MB. Discussion.

— Combien faut-il prendre de termes dans la suite des nombres naturels pour que la somme soit égale à A?

— 6867 étant connu à une unité près, sur combien de chiffres peut-on compter au carré.

— Une balle élastique rebondit aux 2/9 de la hauteur d'où elle tombe. Après avoir rebondi deux fois elle s'élève à 3 mètres. De quelle hauteur est-elle tombée?

— Etant donné un angle A et un point P sur l'un des côtés, trouver sur l'autre côté un point M tel, qu'en abaissant de ce point MH perpendiculaire sur AP et qu'en joignant MP le triangle MHP ait une valeur donnée.

— Calculer les angles d'un quadrilatère inscriptible connaissant les quatre côtés.

— Trouver les valeurs de x pour lesquelles $x^4 - 9x^2 + 8 < 0$.

— Etant donné un angle O et un point P sur l'un des côtés, trouver sur l'autre côté un point M tel, que si l'on mène MP puis la perpendiculaire MA sur OP, la perpendiculaire AB sur OM et ainsi de suite, MP soit égale à la somme de toutes ces perpendiculaires.

— Connaissant l'angle α d'un secteur, inscrire dans ce secteur un carré dont l'un des côtés repose sur le rayon OA. Déterminer α de manière que le carré soit maximum.

— On donne un triangle isoscèle et un point P sur le prolongement de la base. Déterminer une sécante PNM rencontrant en N et en M les côtés AC et AB de façon que la différence BM — CM soit maxima (cas où le triangle est équilatéral).

— Par les extrémités d'un diamètre d'une circonférence donnée on mène deux cordes qui se rencontrent sur la circonférence. Que doivent être ces cordes pour que le rapport des volumes engendrés par chacun des segments circulaires, tournant autour du diamètre, soit égal à un rapport donné $\frac{n}{m}$.

— Calculer $\sqrt{0{,}367 + \sqrt{255}}$.

— Calculer $x = \sqrt{842725 + \sqrt{7}}$ à 0,01 près.

— Mener par un point D pris dans l'intérieur d'un angle, une transversale BC telle, que les segments interceptés BD et DC soient dans un rapport donné $\frac{m}{n} = \frac{4}{5}$.

— Calculer à 1 mètre carré près la surface du secteur dont l'angle est 40°40′ et le rayon 20 mètres.

— Le rayon d'un cercle est 22^m,22 ; le rayon d'un autre cercle, 18 mètres. Calculer à 0,01 près le rayon d'un cercle égal à la différence des deux cercles.

— On a $\text{tg}x = 0{,}483$ à $\frac{1}{1000}$ près. Avec quelle approximation peut-on calculer x. Calculer le cosinus de cet angle.

— Le rayon d'un cercle est 12 mètres; calculer à 0,01 près le côté du carré équivalent.

— On a $x = \sqrt{3827 + \sqrt{2}}$. Calculer x à $\frac{1}{10}$ près.

— Maximum ou minimum de $(2x - 5)^2 + 4$.

— Résoudre et discuter l'équation $\frac{x^2}{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{x^2 - b^2} = 6$.

— Maximum ou minimum de $x^4 - 2x^2 + 8$.

— Maximum ou minimum de $(x^2 - 1)^2 + 7$.

— Maximum de $x^4 - 3x^2 + 7$.

— Résoudre $\frac{x^2}{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{x^2 - b^2} = 9$.

— Résoudre $x + \sqrt{x} = a$.

— Résoudre $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c} = 0$. Discussion.

— Diviser $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ par $(a + b + c)$.

— Déterminer m pour que $a^3 + b^3 + c^3 - mabc$ soit divisible par $a + b + c$.

— Résoudre $\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 + x} = 1$.

— Résoudre $x - y = a$; $x^3 - y^3 = b^3$.

— Résoudre $x^2 + y^2 = 100$; $xy = a^2$.

— Maximum et minimum de $(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)$.

— On a trouvé pour solution d'un problème $\sin x = m$, et $\cos x = n$. Quelle serait la condition pour que les solutions s'accordent?

— On a trouvé pour solution d'un problème $\operatorname{tg} x = n$ et d'autre part $\sin x = m$. Conditions pour que les solutions s'accordent.

— Résoudre et discuter les équations

$$\cos x + \cos y = 1$$
$$\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} = m$$

— Résoudre

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m$$
$$\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = n$$

Discussion en admettant m et n positifs. Si m restant fixe, n croît indéfiniment, vers quelle limite tendent les valeurs trouvées?

— Résoudre

$$\sin x + \sin y = m$$
$$\cos x + \cos y = n$$

— Résoudre $\sin^2 x = 2 \cos a \cos (a - x)$.

— Calculer $\operatorname{tg} x = \sin a + \sin (a + b) + \sin (a + 2b) + \sin (a + 3b)$.

— Résoudre $\operatorname{tg} (x + 45) = m \operatorname{tg} x$.

— Résoudre $\operatorname{tg} (x + a) = 2 \operatorname{tg} x$.

— Résoudre $\sin 3x = 2 \sin^2 x$.

— Résoudre $\operatorname{tg}^2 x = 4 \sin x$.

— Résoudre $\operatorname{tg} x = 4 \sin \frac{x}{2}$.

— Résoudre $3 \sin x = 2 \sin (60 - x)$.

— Maximum ou minimum de $\sin^2 x + 4 \cos x$.

— On connaît $\sin a$. Combien trouvera-t-on de valeurs pour $\operatorname{tg} \frac{a}{4}$?

— Calculer $\operatorname{tg} x = 1 + \sin a + \cos a$. Maximum si a varie de 0 à 90°.

— Résoudre $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = m$.

— Résoudre $\frac{\sin 3x}{\sin^2 x} = m$. Discussion.

— Résoudre $\sin^2 x + \sin^2 (\alpha - x) = \frac{1}{2}$. Introduire l'angle $2x$ dans la résolution.

— Résoudre $\sin x (\sin x + \cos x) = m$.

— Résoudre $\cos x (\sin x + \cos x) = K$, discuter.

— Discuter $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^3 x}$. Cas où x varie de 0° à 30°.

— Résoudre $\cos 2x = 2 \sin x$.

— Résoudre $\sin x = \cos (2x - 45°)$.

— Résoudre $\cos 2x = 4 \sin x$.

— Résoudre $\cos^2 x - \cos^2 (x - m) = m$.

— Résoudre $\sin x \cos (x + \alpha) = m$.

— Résoudre $\frac{\sin x}{\sin (\alpha - x)} = 4$.

— Résoudre $\sin x \sin 3x = \frac{1}{8}$.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE SAINT-CYR.

(*Suite*, voir page 249)

— Étant donné un hémisphère, trouver le rayon ED d'un cercle parallèle à la base de l'hémisphère et tel que le rapport du volume du tronc ABDE à celui de la sphère qui a pour hauteur celle du tronc de cône, soit égal à un nombre donné m.

— Étant donné un demi-cercle, on propose de mener une corde parallèle au diamètre, telle que le segment qu'elle détache tournant autour du diamètre engendre un volume équivalent à celui engendré par le triangle ayant pour base la même corde et pour sommet le centre.

— Étant donné un cercle et un diamètre, à quelle distance du centre faut-il mener une corde perpendiculaire au diamètre pour que le volume engendré par le demi-segment soit égal au volume du cône inscrit de même base?

— Étant donnée une circonférence, à quelle distance AC faut-il mener une corde DE perpendiculaire au rayon OA, pour que le volume engendré par le segment circulaire AMD, soit la moitié du volume engendré par le triangle BCD?

— On donne l'hypoténuse d'un triangle rectangle a; on propose d'en déterminer la hauteur de façon que si l'on circonscrit la demi-circonférence au triangle et que l'on fasse tourner la figure autour de l'hypoténuse, la somme des volumes engendrés par les segments extérieurs au triangle soit égale au volume d'une sphère donnée de rayon R.

— Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône, circonscrit à une sphère

de rayon donné, sachant que le rapport de la surface totale du tronc à la surface totale de la sphère est égal à un nombre donné m.

— Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône lorsque l'on connaît la surface totale du tronc, la longueur de l'apothème et que l'on sait que cette droite fait un angle de 60° avec la base inférieure.

— Étant donnés une tangente AC à un cercle et le diamètre perpendiculaire à AB, on propose de mener une corde DE perpendiculaire à la tangente AC, telle que le triangle AED en tournant autour de la tangente AC engendre un volume donné.

— Couper une sphère par un plan, de manière que l'aire de la section ait un rapport donné avec la moyenne géométrique des surfaces convexes des deux cônes ayant pour base commune la section et les sommets sur la sphère.

— Calculer le rayon r de base d'un tronc de cône droit circonscriptible à une sphère connaissant son volume et sa surface totale.

— Étant donnés le rayon de la base d'un cône et sa hauteur h, à quelle distance x du sommet faut-il mener un plan parallèle à la base, pour que le volume du tronc soit égal à deux fois le volume de la sphère qui aurait x pour diamètre?

— Connaissant la surface totale d'un cône tangent à une sphère donnée et dont le centre de base est au centre de la sphère, calculer le rayon de base et la hauteur du cône.

— Couper une sphère par deux plans parallèles dont la distance est donnée, de telle sorte que si l'on détermine deux cônes tangents à la sphère suivant les cercles de section, la somme des surfaces convexes des deux cônes soit donnée.

— Un cercle étant tangent aux deux côtés de l'angle droit mener une tangente au cercle, qui forme avec les deux côtés de l'angle droit un triangle de surface donnée. — Distinguer deux cas suivant la position de la tangente.

— On donne le périmètre d'un triangle rectangle et la somme des aires engendrées par chacun des côtés de l'angle droit tournant autour de l'autre côté. — Calculer les trois côtés.

— Parmi tous les triangles isocèles inscrits dans un cercle donné, quel est celui qui, en tournant autour de sa base, engendre le plus grand volume.

— Parmi tous les cônes droits de même volume, quel est celui dont la surface convexe est minima.

— Parmi tous les cylindres inscrits dans une sphère donnée, quel est celui qui a le plus grand volume?

— Parmi tous les cylindres inscrits dans une spère donnée quel est celui qui a la plus grande surface totale?

— Etant donné un angle BAC, un point D dans l'intérieur de cet angle, mener la ligne EF de telle sorte que le triangle AEF ait une surface donnée m^2

— Etant donné un angle BAC, un point D mener par ce point une ligne EF telle que $DE \times DF = m^2$

— Connaissant cotg a, calculer cogt $\frac{a}{2}$; lorsque cotga $= \infty$ l'une des valeurs se présente sous la forme $\infty - \infty$ trouver sa vraie valeur.

— On élève un rayon OC perpendiculaire au diamètre AB d'une demi-circonférence. On mène les tangentes en A et en C qui se rencontrent en D; on joint AC et l'on propose de calculer et de comparer les trois volumes engendrés dans une rotation autour de AB, par le triangle rectangle ADC, le segment AKC et la figure AKCD.

— Inscrire dans un cercle donné une corde de longueur donnée qui soit partagée par une autre corde donnée en deux parties égales.

— Par un point situé hors d'une circonférence mener une sécante qui soit partagée en deux parties égales par la circonférence.

— Un demi-cercle étant donné, partager son diamètre en deux parties telles que si l'on décrit sur chacune une demi-circonférence, la surface comprise entre le premier demi-cercle et les deux derniers soit égale à celle d'un cercle donné.

— Par un point donné sur la bissectrice d'un angle droit, mener une droite terminée aux côtés de l'angle et déterminant un triangle ayant une surface donnée.

— Par un point extérieur à un cercle, mener une sécante, telle que la somme des carrés des segments de cette sécante soit équivalente à un carré donné.

— Déterminer les éléments d'un cylindre droit sachant que la somme du rayon de base et de sa hauteur est égale à a et que sa surface convexe est égale au cercle de rayon R. (*A suivre.*)

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le **Dr Henri Suter**, de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon.

(*Suite*, voir page 251)

LA SCIENCE CHEZ LES GRECS.

Son importation. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie.

Les grands progrès des mathématiques sous Platon et ses successeurs ont leur source dans l'essence de la philosophie platonicienne. La tendance idéale de leurs leçons était favorable à l'étude des sciences abstraites. Tant que l'étude des mathématiques tendit à la connaissance pure des plus hauts principes des sciences, le grand philosophe l'aima et la regarda comme la base de toute autre connaissance; mais dès qu'elle s'unit au matérialisme et servit les destinées et les besoins de la vie pratique, il en eut horreur. L'astronomie, par exemple, ne trouva droit de cité chez les platoniciens qu'en

s'adressant aux spéculations philosophiques. Écoutons sur ce sujet *Platon* lui-même ; il dit en propres termes : « Les vrais astronomes sont, d'après moi, des hommes sages, mais nullement semblables à *Hésiode* et autres *astronomiciens* (traduction du mot grec ἀστρονομοῦντες), qui veulent cultiver cette science pour observer le lever et le coucher du soleil. Les vrais astronomes sont des hommes sages qui sondent les huit sphères du ciel et la grande harmonie de l'univers ; et cette recherche est seule digne de l'esprit de l'homme illuminé par les dieux. »

Aussi, comme nous l'avons dit, les sciences abstraites étaient-elles en honneur. Les mathématiques sont, aux yeux de Platon, une moyenne, une transition entre la conception exacte et la philosophie ; il les regarde comme un degré nécessaire que chacun doit franchir avant d'aborder la philosophie. Par suite *Platon* appelle « *connaissance* » (διάνοια) ce qui est plus clair que la conception, mais plus obscur que l'idéal de la philosophie, son plus haut degré.

Il est bien entendu que *Platon* mettait les mathématiques à la base des leçons philosophiques ; mais il les excluait de son enseignement, qui ne comprenait pas de géométrie. C'est d'après ces dernières idées qu'il faut interpréter l'inscription placée à l'entrée de l'Académie : « Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσιτω μοῦ τὴν στέγην ». — Que celui qui ne connaît pas la géométrie n'entre pas chez moi. — C'est ainsi qu'un successeur de Platon, *Xenocrate*, renvoyait un de ses auditeurs qui n'avait pas de connaissances en arithmétique et en géométrie : « πορεύου, λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφιας ». — Retire-toi, car tu n'as pas les outils nécessaires à la philosophie.

De *Platon* date l'honneur pour les mathématiques pures d'être regardées comme la science d'éducation par excellence et la créatrice du jugement. En face de lui est Aristote qui, le premier, appliqua la méthode d'observation aux sciences de la nature et s'attacha aux sciences utiles et pratiques.

— Platon naquit à Athènes 430 avant J.-C. De bonne heure il se voua à l'étude de la philosophie pythagoricienne et atomistique. Il fut connu et apprécié de Socrate, qui l'eut

pour son plus fidèle disciple jusqu'à sa mort. Aussi n'a-t-il fait que réunir en un corps de doctrine et développer la philosophie de son maître, même lorsque ses idées personnelles étaient en opposition avec celles de Socrate. Ainsi, dans les sciences mathématiques, Socrate rejette comme inutile et nuisible tout ce qui ne trouve pas d'application immédiate dans les affaires de la vie ordinaire; tandis que Platon dédaigne leur côté pratique et prescrit aux sciences un but entièrement spéculatif et idéal.

Après la mort de Socrate, Platon fit plusieurs grands voyages en Egypte et en Sicile ; dans le cours de ces excursions, il se lia avec plusieurs hommes célèbres, tels que les pythagoriciens *Philolaos* et *Timaeos* en Italie, et *Theodoros* de Cyrène. De retour à Athènes, il fonda, à l'Académie, son école platonicienne qui, sous son impulsion et ses encouragements, obtint les plus grands succès dans les mathématiques : nous devons entrer dans quelques détails sur le développement de cette science.

Le laps de temps qui s'écoule de *Platon* à *Euclide* nous offre des choses si intéressantes en mathématiques que nous en sommes réduits à regretter de ne pas avoir sur cette période plus de documents que sur la précédente. *Proclus* ne nous cite que quelques platoniciens, mathématiciens célèbres; et il ne nous est resté que des fragments courts et peu importants de l'histoire d'*Eudème*. — Aussi n'avons-nous que des données incertaines et incomplètes sur le mérite des divers mathématiciens de l'école de Platon, sur la part qui doit être attribuée à chacun dans l'introduction et l'emploi de la méhode analytique, dans la découverte des sections coniques, et dans la solution des trois fameux problèmes de l'antiquité : la quadrature du cercle, la duplication du cube, la trissection de l'angle.

En dehors de quelques productions géométriques de Platon, il faut lui attribuer l'invention de cette méthode analytique qui a puissamment aidé à la découverte et à l'étude des sections coniques. *Diogène Laerte* et *Proclus* nous disent que Platon introduisit cette méthode de recherches pour son élève *Leodamas* de *Thasos*; et celui-ci fut, grâce à elle, conduit

à de nombreuses et importantes propositions. Nous ne pourrions dire comment Platon a procédé avec ce nouveau mode de démonstration, car il ne nous reste aucun travail géométrique suivi, provenant soit de lui, soit de ses successeurs.

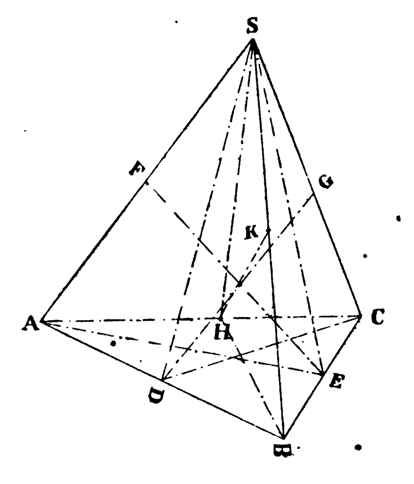
(A suivre.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 108.

Solution par M. Fabing, élève du Collège de Longwy.

Dans tout tétraèdre la somme des carrés des arêtes est égale à quatre fois la somme des carrés des droites qui joignent les milieux des arêtes opposées.



Soit le tétraèdre SABC; D, E, F, G, H, K les milieux des arêtes. Joignons DS, DC, AE, ES, ... etc.

Les triangles SDC SEA ... ainsi formés, ayant pour médianes les droites qui joignent les milieux des arêtes, donnent :

$$2\overline{DG}^2 = \overline{DS}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{GC}^2$$

$$2\overline{EF}^2 = \overline{SE}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AF}^2$$

$$2\overline{HK}^2 = \overline{SH}^2 + \overline{HB}^2 - 2\overline{KB}^2$$

d'où en additionnant :

$$2[\overline{DG}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{HK}^2] = \overline{DS}^2 + \overline{SE}^2 + \overline{SH}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{HB}^2 - 2(\overline{GC}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{KB}^2)$$

or

$$\overline{DS}^2 = \frac{\overline{AS}^2 + \overline{SB}^2 - 2\overline{BD}^2}{2}$$

$$\overline{DC}^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2\overline{DB}^2}{2}$$

$$\overline{SE}^2 = \frac{\overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 - 2\overline{BE}^2}{2}$$

$$\overline{AE}^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{BE}^2}{2}$$

$$\overline{SH}^2 = \frac{\overline{AS}^2 + \overline{SC}^2 - 2\overline{HC}^2}{2}$$

$$\overline{BH}^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{HC}^2}{2}$$

remplaçant dans l'égalité précédente $\overline{DS}^2$, $\overline{DC}^2$ .... par ces valeurs il vient, en remarquant que

$$4\overline{DB}^2 = \overline{AB}^2,\ 4\overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 \ \ldots.$$

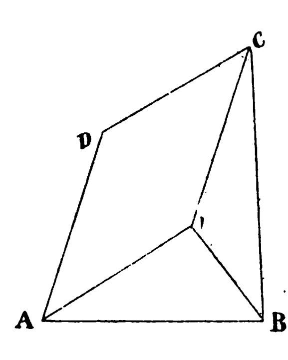
et réduisant

$$\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + \overline{CS}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$
$$= 4(\overline{DG}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{HK}^2)$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Lafarge, de Paris; Lerossay, de Liége; Bailly, Duyster, de Bruxelles; Martin et Reuss, de Belfort; Cordeau, école Lavoisier; Mirjolet, Hoc, de Longwy; Perrin, de Clermont-Ferrand; Menand, de Dijon; d'Ocagne, collége Chaptal; Schmitz, d'Orléans; Malesset, de Poitiers; Tissier, de Châteauroux; Dalzon, de Saint-Étienne; Marcellin, de Cherbourg; de Montgolfier, Laburthe, école de Passy; Choyer, de Poitiers; Cottereau, de Châteauroux; Amestoy, de Bayonne; Leblanc, de Cherbourg; Lambert, de Dinant; Deseilligny, collége de Pons; Bruyand, de Troyes; Laclette, de Pau; Jordan, de Montpellier; Vautré, de Saint-Dié; Garnier, lycée Saint-Louis; Demortain, de Doullens; Martin, Clavez, de Lons-le-Saulnier; Charzat, à Melun.

QUESTION 109.

Solution par M. Daudy, élève du Collége Chaptal, institution Marc-Dastès



Construire géométriquement un quadrilatère dans lequel on connaît quatre côtés et l'angle formé par le prolongement de deux côtés opposés.

Supposons le problème résolu et soient $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ les côtés et α l'angle donné.

Par A menons $AI = DC = c$. Cette droite fait avec AB un angle $BAI = \alpha$. La figure AIDC est un

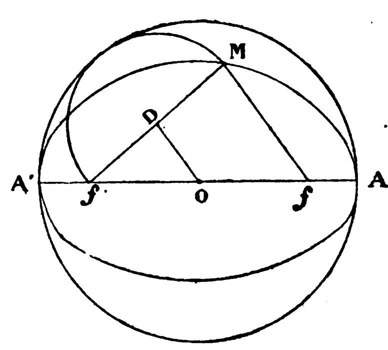
parallélogramme. Joignons B et I. Les deux triangles AIB et BIC sont déterminés. Par suite le quadrilatère ABCD.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Cottereau de Châteauroux; Locherer, Menand de Dijon; Marcellin, de Cherbourg; Perrin, de Clermont-Ferrand; Vautré, de Saint-Dié; Cordeau, école Lavoisier; Estienne, de Bar-le-Duc.

QUESTION 110.

Solution par M. LAFARGE, élève du Lycée Henri IV.

Le cercle décrit sur un rayon vecteur d'une ellipse comme diamètre est tangent au cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.



Soit $f'M$ le rayon vecteur sur lequel on décrit une circonférence. Si les deux circonférences AA', $f'M$ sont tangentes, la distance OD de leurs centres est égale à la différence de leurs rayons. On doit donc avoir $OD = A'O - DM = a - \frac{f'M}{2}$, $2a$ étant le grand axe. Or $Mf' + Mf = 2a$ (1) et DO joignantles milieux des côtés $f'M$ et ff' est égal à la moitié de Mf et lui est parallèle; donc $DO = \frac{Mf}{2}$ et à cause de (1) $\frac{Mf}{2}$ $= a - \frac{Mf'}{2} = OA' - DM.$

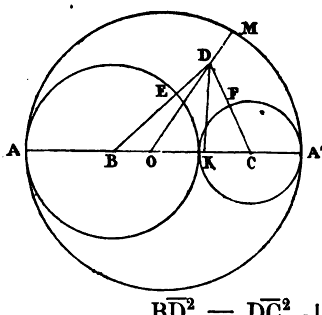
Donc les deux circonférences Mf' et AA' sont tangentes.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Marcellin, de Cherbourg; Menand, de Dijon; Perrin, de Clermont-Ferrand; Demortain, de Doullens; Vautré, de Saint-Dié; Gubiant, de Bourg; Locherer, de Dijon; Cordéau, école Lavoisier; d'Ocagne, collége Chaptal; Malessiet, de Poitiers; Jordan, de Montpellier; Clavez et Margain, Estienne, de Bar-le-Duc; Choyer, de Poitiers.

QUESTION 113.

Solution par M. Perrin, élève du Lycée de Clermont-Ferrand.

Trois cercles dont les centres sont en ligne droite sont tangents deux à deux. Trouver le rayon d'un cercle tangent à la fois aux trois cercles donnés.



Soient les cercles O, B, C tangents deux à deux et D le centre du cercle dont on cherche le rayon. Menons DB, DC, DO et soit DK perpendiculaire sur BC. Le triangle BDC donne

$$\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \cdot CK$$

et le triangle DOC donne

$$\overline{DO}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{DC}^2 - 2OC \cdot CK.$$

De ces deux égalités on tire

$$\frac{\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2}{BC} = \frac{\overline{OC}^2 + \overline{DC}^2 - \overline{DO}^2}{OC}$$

ou $\dfrac{(x+r)^2 + (R+r)^2 - (R+x)^2}{R+r} = \dfrac{R^2 + (x+r)^2 - (R+r-x)^2}{R}$

en appelant R et r les rayons des cercles B et C et x le rayon cherché. Simplifiant il vient

$$x = \frac{Rr(R+r)}{R^2 + r^2 + Rr} = \frac{Rr(R+r)}{(R+r)^2 - Rr}$$

ou

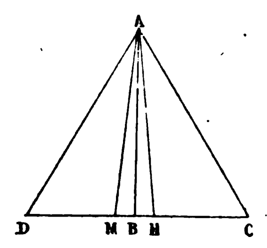
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r} - \frac{1}{R+r}$$

Remarque. — M. Demortain, de Doullens, outre la bonne solution qu'il nous adresse, fait remarquer que l'ordonnée DK du centre du cercle D est égale à son diamètre.

QUESTION 114.

Solution par M. Demortain, élève à l'École communale de Doullens.

Dans tout triangle la demi-différence de deux côtés est moyenne proportionnelle entre les distances sur le troisième, du pied de la médiane à ceux de la hauteur et de la bissectrice intérieure.



Si l'on remplace la bissectrice intérieure par la bissectrice extérieure, il faut substituer la demi-somme des côtés à leur demi-différence. (H. Lecoq.)

Soient AM, AB, AH les médiane, bissectrice et hauteur du triangle ACD. Posons MB $= m$, MH $= n$. On a

$$\frac{d}{c} = \frac{a - 2m}{a + 2m}$$

d'où $$m = \frac{a(c - d)}{2(c + d)} \qquad (1)$$

On a aussi $$c^2 - d^2 = 2an$$

d'où $$n = \frac{c^2 - d^2}{2a} \qquad (2)$$

multipliant (1) et (2) membre à membre on trouve après simplifications $$\left(\frac{c - d}{2}\right)^2 = mn.$$

Nota : MM. Clavez et Morgain du lycée de Lons-le-Saulnier ont résolu la même question.

CORRESPONDANCE.

M. Pradelle, de Nîmes, nous envoie une solution de la question 96 plus complète que celle que nous avons publiée précédemment. D'abord il démontre que l'équation $ma + nb = 1$, lorsque m et n sont premiers entre eux, peut toujours être satisfaite. Nous avions admis ce point, parce que l'analyse indéterminée du premier degré s'étudie dans les cours de mathématiques élémentaires, particulièrement dans l'enseignement spécial. Mais, en outre, et c'est le point important de la démonstration que nous signalons ici, M. Pradelle donne la formule permettant de trouver *tous* les nombres répondant à la question. Nous reproduisons ici sa solution.

Soient x et x' deux valeurs de x telles que $10^n x + \alpha$ et $10^n x' + \alpha$ soient des multiples de p. Il en résulte que la différence $10^n (x - x')$ sera un multiple de p. Cette condition est nécessaire et suffisante. Comme 10^n est premier avec p, il faudra que $x - x'$ soit un multiple de p. On devra donc avoir $x = x' + mp$, m étant un nombre entier. En donnant à m toutes les valeurs possibles, on aura toutes les valeurs de x répondant au problème.

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 14118-8.

THÉORIE DES AXES RADICAUX

Par **A. Morel**.

(*Suite*, voir page 297.)

§ III. *Distances circulaires.*

XV. La puissance d'un point par rapport à un cercle passant par un point fixe, et dont le rayon croît indéfiniment, augmente elle-même indéfiniment. Pour ce motif, il est avantageux de remplacer cette notion de la puissance par une autre équivalente : *le rapport de cette puissance au diamètre du cercle considéré.* Lorsque le cercle se rapproche indéfiniment d'une droite, ce rapport, que nous appellerons la *distance circulaire du point* au cercle, a pour limite la distance du point à la droite.

XVI. **Théorème.** — *Le lieu géométrique des points dont le rapport* $\frac{m_1}{m_2}$ *des distances circulaires à deux cercles est constant, est un cercle passant par les points d'intersection des deux cercles donnés, et qui divise leur angle en deux autres dont le rapport des sinus est égal à* $\frac{m_1}{m_2}$.

En effet, soient deux cercles O_1 et O_2, qui se coupent en A. Soit M un point du lieu ; les puissances de M par rapport à chacun des cercles sont respectivement $MO_1^2 - r_1^2$, $MO_2^2 - r_2^2$. On doit donc avoir

$$(1) \qquad \frac{MO_1^2 - r_1^2}{2r_1} = \frac{m_1}{m_2} \times \frac{MO_2^2 - r_2^2}{2r_2}$$

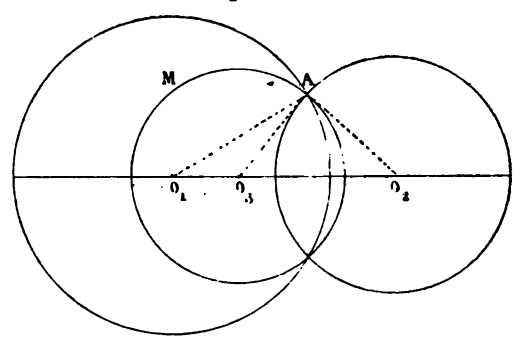
Soit O_3 le centre des distances proportionnelles des points O_1, O_2, correspondant aux coefficients m_2r_2 et m_1r_1. On a :

$$\frac{O_1O_3}{O_2O_3} = \frac{m_1r_1}{m_2r_2}. \qquad (2)$$

On voit par l'équation (1) que le point M doit être tel que sa puissance totale par rapport aux deux cercles soit nulle. Le point M décrit donc un cercle, ayant pour centre

le point O_3, et passant par les points communs aux deux cercles, lorsque ceux-ci se coupent.

Soit A l'un des points communs aux deux cercles; joignons ce point aux trois points O_1, O_2, O_3. Les angles des cercles entre eux sont égaux aux angles des rayons AO_1, AO_2, AO_3. Mais les triangles ayant pour sommet le point A, et pour bases O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3 ont même hauteur; leurs aires sont proportionnelles à leurs bases; et l'on aura, en exprimant ces surfaces en fonction de l'angle au sommet et des côtés qui le comprennent:



$$\frac{O_1O_3}{O_2O_3} = \frac{r_1 r_3 \sin O_1AO_3}{r'_2 r_3 \sin O_2AO_3}.$$

Mais, en ayant égard à la relation (2), on trouve, en supprimant les facteurs communs,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin O_1AO_3}{\sin O_2AO_3}.$$

On voit que ce théorème est la généralisation de ce théorème que le lieu des points dont le rapport des distances à deux droites est constant, est une droite passant par l'intersection des deux premières, et divisant l'angle en deux autres dont le rapport des sinus est égal au rapport donné.

XVII. Dans le cas particulier où $\frac{m_1}{m_2} = 1$, le lieu des points à égale distance circulaire de deux cercles, est encore un cercle dont le centre divise la ligne des centres dans le rapport des rayons et, par suite, est au centre de similitude interne. Si les deux eercles se coupent, il divise leur angle en deux parties égales. Si $\frac{m_1}{m_2} = -1$, on obtient un second cercle ayant pour centre le centre de similitude ex-

terne. Si les deux cercles se coupent, ces deux cercles que Steiner a appelés *cercles de moyenne puissance* sont entièrement analogues aux bissectrices d'un angle. Nous les appellerons *cercles bissecteurs*.

Pour trouver le rayon du cercle des moyennes distances, nous partirons de l'équation qui donne la puissance totale du point M par rapport aux deux cercles O_1 et O_2. On a la formule générale

$$m_2 r_2 \, MO_1^2 - m_1 r_1 \, MO_2^2 = (r_2 - r_1)\, MO_3^2 + r_2 O_3O_1^2 - r_1 O_3O_2^2$$

Si l'on fait $m_2 = m_1$, il vient, en tenant compte de la relation (1) (*art.* 29),

$$r_2 r_1^2 - r_1 r_2^2 = (r_2 - r_1)\, MO_3^2 + r_2 O_3O_1^2 - r_1 O_3O_2^2$$

Mais on a :

$$O_3O_1 = \frac{r_1 \times O_1O_2}{r_1 - r_2}; \qquad O_3O_2 = \frac{r_2 \times O_1O_2}{r_1 - r_2}$$

En portant ces valeurs dans l'égalité précédente, il vient :

$$r_1 r_2 (r_1 - r_2) = (r_2 - r_1)\, MO_3^2 + \frac{O_1O_2^2}{(r_1 - r_2)^2}(r_1 - r_2) r_1 r_2$$

Ou enfin, en divisant par $r_2 - r_1$, on trouve :

$$MO_3^2 = r_1 r_2 \left(\frac{O_1O_2^2}{(r_1 - r_2)^2} - 1\right).$$

On trouverait de même, en faisant $m_2 = - m_1$, la formule

$$MO_4^2 = r_1 r_2 \left[1 - \frac{O_1O_2^2}{(r_1 + r_2)^2}\right].$$

Si maintenant nous remplaçons dans cette formule O_1O_2 par son expression en fonction de l'angle des cercles, on trouve :

$$MO_3^2 = \frac{2\, r_1^2 r_2^2}{(r_1 - r_2)^2}(1 - \cos A)$$

$$MO_4^2 = \frac{2 r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2}(1 + \cos A)$$

ou enfin, en appelant ρ et ρ' ces rayons, on a :

$$\rho = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 - r_2} \sin \frac{A}{2}; \qquad \rho' = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2} \cos \frac{A}{2}$$

En additionnant les valeurs trouvées pour MO_3^2 et MO_4^2, on voit que la somme de ces quantités est égale au carré de O_3O_4 ; par suite les cercles bissecteurs sont rectangulaires.

On peut remarquer que ces valeurs de ρ et de ρ' sont

identiques avec les valeurs des bissectrices d'un angle d'un triangle en fonction des côtés de l'angle et de la valeur de cet angle. Cela est évident puisque, si les cercles se coupent, les rayons ρ et ρ' se confondent eux-mêmes avec les bissectrices de l'angle A du triangle O_1AO_2, d'après la remarque que nous avons faite précédemment.

XVIII. On peut donner du rapport des distances circulaires d'un point à deux cercles un certain nombre d'autres expressions importantes.

1° Appelons t_1 la tangente menée du point M au cercle O_1, $2\alpha_1$ l'angle sous lequel, du point M on voit ce cercle. La distance circulaire du point M est $\frac{t_1^2}{2r_1}$. Mais on a

$$t_1 = r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 ;$$

donc la distance circulaire de M au centre O_1 est $\frac{r_1}{2} \operatorname{cogt}^2 \alpha_1$

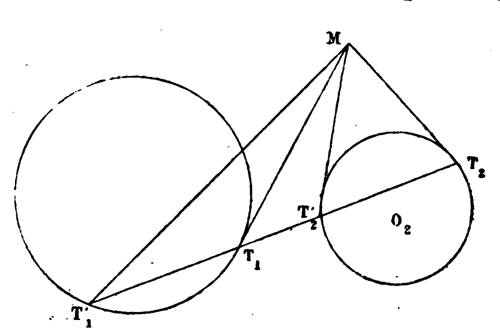
par suite $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1 \operatorname{cotg}^2 \alpha_1}{r_2 \operatorname{cotg}^2 \alpha_2}.$$

2° Si nous menons la seconde tangente au cercle O_1, nous formons un quadrilatère inscriptible, et si nous appelons c la corde de contact on a

$$c \,.\, MO_1 = 2r_1t_1$$

Donc la distance circulaire a pour expression

$$\frac{c^2 \,.\, MO_1^2}{8r_1^3}.$$



3° Menons les tangentes MT_2 et MT_1 puis, la ligne T_1T_2 qui coupe les cercles en T_1' et T'_2.

On a

$$\frac{MT_2}{MT_1} = \frac{\sin MT_1T_1'}{\sin MT_1T'_2}.$$

Mais on a aussi $$\frac{T_1T_1'}{T_1T_1'} = \frac{r_1 \sin MT_1T_1'}{r_2 \sin MT_2T_2'}.$$

Donc $$\frac{MT_1}{MT_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{T_2T_2'}{T_1T_1}.$$

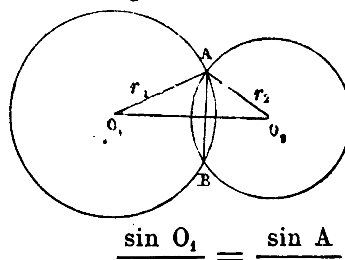
Par suite $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(T_2T_2')^2}{(T_1T_1')^2}.$$

XIX. Nous allons indiquer ici quelques formules qui donnent, dans un système de deux cercles, les valeurs de certains éléments qui peuvent être utiles à connaître.

1. *Angle des tangentes communes.* — Nous savons que cet angle est partagé en deux parties égales par la ligne des centres. Du reste, la construction que l'on donne en géométrie élémentaire nous donne immédiatement en appelant 2α l'angle des tangentes communes extérieures, et 2β l'angle des tangentes communes intérieures,

$$\sin \alpha = \frac{r_1 - r_2}{O_1 O_2}; \ \sin \beta = \frac{r_1 + r_2}{O_1 O_2}.$$

Si l'un des sinus était supérieur à 1, l'angle correspondant serait imaginaire.



2. *Angle de la corde commune avec chacun des cercles.* — Les angles que la corde commune fait avec les cercles sont respectivement égaux aux angles en O_1 et O_2 du triangle O_1AO_2. On a

$$\frac{\sin O_1}{r_2} = \frac{\sin A}{O_1O_2}; \quad \frac{\sin O_2}{r_1} = \frac{\sin A}{O_1O_2}.$$

Or, dans le triangle O_1AO_2, on a, en posant

$$r_1 + r_2 + \delta = 2p$$

$$\sin A = \frac{1}{r_1r_2} \sqrt{p(p - r_1)(p - r_2)(p - \delta)}.$$

Donc $$\sin O_1 = \frac{1}{r_1 \delta} \sqrt{p(p - r_1)(p - r_2)(p - \delta)},$$

$$\sin O_2 = \frac{1}{r_2 \delta} \sqrt{p(p - r_1)(p - r_2)(p - \delta)}.$$

3. *Longueur de la tangente menée du centre de similitude à l'un des cercles.* — Si nous considérons d'abord la tangente menée par le centre de similitude extérieur, on a

$$\frac{ST_2}{r_2} = \frac{\sqrt{\delta^2 - (r_1 - r_2)^2}}{r_1 - r_2},$$

de même $\quad \dfrac{ST_1}{r_1} = \dfrac{\sqrt{\delta^2 - (r_1 - r_2)^2}}{r_1 - r_2}.$

Il est facile d'en déduire que

$$ST_1 \times ST_2 = MO_3^2 \ (34).$$

On aura de même

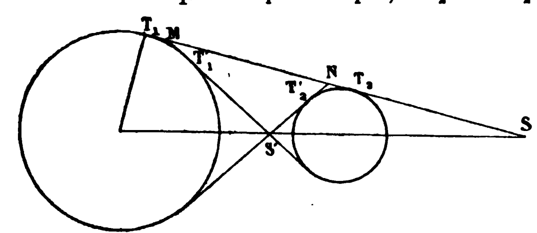
$$\frac{S'T'_1}{r_1} = \frac{\sqrt{\delta^2 - (r_1 + r_2)^2}}{r_1 + r_2}; \quad \frac{S'T'_2}{r_2} = \frac{\sqrt{\delta^2 - (r_1 + r_2)^2}}{r_1 + r_2};$$

et l'on en tire $\quad S'T'_1 \times S'T'_2 = - MO_4^2.$

4. *Longueur de la portion de tangente commune extérieure comprise entre les deux tangentes communes intérieures.* — On sait que, si l'on considère le triangle MS'N, et les deux cercles ex-inscrits touchant le côté MN en T_1 et T_2, on a

$$T_1T_2 = MS' + S'N.$$

Mais d'autre part $\quad T_1M = T'_1M; \quad T_2N = T'_2N.$



Donc on en déduit ce théorème : *La portion de tangente commune extérieure comprise entre les deux tangentes communes intérieures est égale à la tangente commune intérieure.* On verrait de même que *la portion de tangente commune intérieure comprise entre les tangentes communes extérieures est égale à la tangente commune extérieure.*

Si nous voulons calculer cette valeur en fonction des rayons et de l'angle des deux cercles, nous avons

$$S'T'_1 + S'T'_2 = T'_1T'_2 = \sqrt{\delta^2 - (r_1 + r_2)^2},$$

or, on a (27) $\quad \cos A = \dfrac{r_1^2 + r_2^2 - \delta^2}{2r_1 \, r_2};$

d'où $\quad \cos^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{(r_1 + r_2)^2 - \delta^2}{4r_1 \, r_2}.$

Par suite $\quad T'_1T'^2_2 = - 4r_1 \, r_2 \cos^2 \dfrac{A}{2}.$

On trouverait de même

$$T_1T_2^2 = 4r_1 \, r_2 \sin^2 \frac{A}{2}.$$

(*A suivre.*)

NOTE SUR LA DIVISION ARITHMÉTIQUE

Soit à diviser un nombre A entier par un autre B et supposons que le quotient soit inférieur à 10. Désignons par Q le quotient composé d'un chiffre et par R le reste moindre que B. Nous avons, par définition de la division

$$A = BQ + R$$

d'où l'on voit que $\quad R = A - BQ.$

On sait comment on obtient rapidement R en multipliant le diviseur par le chiffre Q et en effectuant la soustraction.

On peut encore abréger cette opération en se servant du *complément* du diviseur. Soit 10^m la première puissance de 10 supérieure à B et posons

$$B' = 10^m - B$$

d'où $\quad B = 10^m - B'$

nous en conclurons $R = A - 10^m Q + B'Q$

ou $\quad R + 10^m Q = A + B'Q$

Donc : *En multipliant le complément du diviseur par le chiffre du quotient et en l'ajoutant au dividende, on obtiendra d'abord le reste et à sa gauche le chiffre du quotient, ce qui servira de contrôle à l'opération.*

Remarque. — Nous disons que le chiffre du quotient se trouvera à la gauche du reste, cela tient à ce que R est moindre que B et à fortiori que 10^m.

Corollaire. — De là résulte un moyen de faire la division dans le cas général, plus simplement que par le procédé habituel, car les soustractions se trouvent remplacées par des additions. Voici un tableau de calcul.

```
5678.45432 | 1878 .... 8122 = B'
3.004445   |_________________
  2.06894  | 302.367
   3.12603
    6.13352
     7.0206
```

$Q = 302.367 \qquad R = 206$

REMARQUE. — Le complément du diviseur se prend à vue en prenant le complément à 9 de chaque chiffre et le complément à 10 du dernier chiffre significatif à droite.

Chaque division partielle se fait comme à l'ordinaire et l'on vérifie mentalement chaque chiffre du quotient en divisant le dividende par ce chiffre; on doit trouver un quotient au moins égal au diviseur.

Cette méthode, pour faire la division, nous a été communiquée par M. Lemonnier, professeur de mathémathiques spéciales au Lycée Henri IV; il la tenait lui-même de l'un de ses premiers professeurs. J. B.

ÉTUDE

SUR

LES LIGNES D'ÉGALE TEINTE ET LE LAVIS A TEINTES PLATES

Par M. **Cotillon**.

Définitions et Règles générales.

Le lavis peut être défini de la manière suivante :

« L'art d'exprimer sur un plan, à l'aide de teintes dégradées provenant d'une couleur unique, la sensation que produit sur un observateur la vue d'un objet dont la forme, la position, la nature de surface et le mode d'éclairage sont déterminés. »

On voit, par ce seul énoncé, que l'art du lavis comporte deux opérations successives :

1° Figurer au trait la silhouette des objets à représenter et les limites des ombres;

2° Modeler les formes par l'application judicieuse de teintes d'encre de Chine, l'encre de Chine étant la couleur dont l'emploi nous a paru le plus rationnel.

La première opération se fait d'une manière tout à fait exacte, par les méthodes de la géométrie descriptive.

Au contraire, le dessinateur n'a plus aucun guide aussitôt qu'il a pris le pinceau; c'est au sentiment qu'il place ses teintes et qu'il en gradue l'intensité; le modelé, c'est-à-dire

le relief traduit par les variations de l'éclat lumineux, est livré à l'arbitraire; mettez entre les mains de deux dessinateurs les tracés d'un même objet, ils vous rendront, le plus souvent, deux lavis fort différents entre eux et qui ne produiront, peut-être, ni l'un ni l'autre, l'impression exacte du relief.

Il y a pourtant une complète analogie entre les deux termes du problème. S'il est vrai que la projection d'un objet soit la résultante mathématique de sa forme et de sa position par rapport au point de vue et au plan de projection, il n'est pas moins vrai qu'étant définis le mode d'éclairage et la nature de la surface éclairée, l'éclat lumineux, en chaque point, c'est-à-dire le modelé, est la conséquence mathématique de ces données.

La solution du problème est donc certaine, mais elle n'en est pas moins difficile; la question, en tant que problème scientifique, est encore presque neuve, quoiqu'elle ait donné lieu à un grand nombre de tentatives, et que des savants s'en soient occupés sérieusement et aient même obtenu des résultats fort intéressants; citons en première ligne l'illustre Léonard de Vinci, à la fois grand peintre et grand physicien; puis Bouguer, Monge, fondateur de la géométrie descriptive, et ses élèves; de nos jours, Chevreul, Brisson, Jamin, etc.

On est obligé de reconnaître que, prise dans toute sa généralité, la question est extrêmement compliquée, le degré de poli de la surface, son pouvoir réflecteur et absorbant, l'intensité des diverses lumières, des reflets, le milieu interposé, etc., sont des éléments difficiles à définir et à calculer, et qui tous ont une influence considérable sur le résultat. Le problème, même en le supposant complétement résolu pour un cas particulier, comporterait pour tout autre cas une solution différente.

Telle est la raison que l'on a quelquefois alléguée pour dénier toute valeur aux recherches de cette nature.

Il ne nous paraît pas qu'il faille s'arrêter à cette objection, car on l'opposerait avec la même force à toute espèce de recherche scientifique, et en particulier à la géométrie

descriptive, dans laquelle on suppose réalisées des conditions idéales qui ne se rencontrent jamais dans la nature; et, cependant, qui songe à nier l'utilité de la géométrie descriptive?

Définir nettement des données simples, accessibles au calcul et se rapprochant des données naturelles, c'est ainsi qu'il faut poser le problème.

La solution théorique obtenue de cette façon servira de guide pour la solution approchée dans chaque cas particulier. (*A suivre.*)

NOTE D'ARITHMÉTIQUE.

Les questions relatives au calcul par approximation prennent dans les examens pour les écoles spéciales, une importance qui grandit chaque année. Les bons traités sur les approximations ne manquent pas, et par suite nous n'avons pas l'intention ici de reprendre la théorie des erreurs absolues ou relatives; mais ce qui fait souvent défaut, à côté de ces bonnes études théoriques, c'est l'indication de la marche à suivre pour appliquer à des exemples réels les connaissances que l'on peut avoir acquises. Nous croyons donc être utile à nos lecteurs, en leur donnant, sur quelques-uns des exemples proposés aux examens oraux de l'école Saint-Cyr, dans ces dernières années, une idée rapide de la solution de ce genre de questions.

1. *On donne le nombre* 64732,78. *Sur combien de chiffres peut-on compter à la racine carrée de ce nombre?*

Nous calculerons la limite de l'erreur absolue de la racine carrée, en remarquant que, A' étant un nombre approché, dont la valeur exacte est A, on a identiquement $(\sqrt{A} - \sqrt{A'})(\sqrt{A} + \sqrt{A'}) = A - A'$. Par suite, on a

$$\sqrt{A} - \sqrt{A'} < \frac{A - A'}{2\sqrt{A'}}.$$

Donc : la limite de l'erreur absolue de la racine carrée est

l'erreur absolue du nombre divisée par le double de la racine carrée du nombre approché. On aura une valeur supérieure de cette limite, en remplaçant le nombre approché par le nombre formé en prenant le plus grand carré contenu dans la première tranche à gauche, et remplaçant les autres chiffres par des zéros. On aura donc ici

$$e < \frac{0{,}01}{2 \times 200}$$

Donc $$e < \frac{1}{40000}$$

L'erreur absolue est moindre qu'un quarante-millième, et, par suite, on peut compter sur les quatre premiers chiffres décimaux; il y a trois chiffres à la partie entière; donc, on pourra compter sur sept chiffres à la racine.

Si la première tranche à gauche eût compté deux chiffres, il aurait pu se présenter deux cas; ou bien cette tranche est inférieure à 25; alors on ne peut compter que sur autant de chiffres moins un qu'il y en a au nombre donné; ou bien elle est supérieure à 25, on peut alors compter sur autant de chiffres à la racine qu'il y en a au nombre donné. Dans aucun cas on ne peut compter sur plus de chiffres à la racine qu'il n'y en a au nombre.

2. *On veut calculer le cube de π à un centième près. Combien faut-il prendre de chiffres exacts à π?*

Le cube de π est inférieur à 40; mais supérieur à 20; il est facile de s'en apercevoir en faisant le cube de π en prenant un, ou deux chiffres décimaux. Donc, l'erreur relative du cube de π sera certainement moindre que $\frac{1}{2 \cdot 10^3}$. Il suffit donc que l'erreur relative de π soit inférieure à $\frac{1}{6 \cdot 10^3}$; comme 6 est supérieur au premier chiffre de π il en résulte que, pour être sûr d'avoir une erreur relative inférieure à $\frac{1}{6 \cdot 10^3}$, il faudra prendre quatre chiffres décimaux au nombre π pour l'élever au cube. De plus, on aura soin d'employer pour le calcul la méthode de la multiplication abrégée.

3. *Calculer à 0,01 l'expression* $\frac{18}{1 + \sqrt{2}}$.

Le numérateur de cette expression est exact, et le dénominateur peut être pris avec telle approximation que l'on voudra. Ce que l'on cherche précisément, c'est à ne calculer ce dénominateur qu'avec l'approximation nécessaire. Or, le dénominateur seul étant approché, l'erreur relative du quotient sera à peu près égale à l'erreur relative du facteur approché. De plus le dénominateur étant supérieur à 2,4, le premier chiffre du quotient sera 7 ; donc l'erreur relative du quotient sera inférieure à $\frac{1}{700}$. Il faudra donc calculer le dénominateur de telle façon que son erreur relative soit moindre que $\frac{1}{700}$, et pour cela il faudra calculer $\sqrt{2}$ avec trois chiffres décimaux exacts.

4. Cet exemple nous amène à traiter la question suivante, qui peut présenter au point de vue théorique un certain intérêt : *Lorsque le dénominateur d'une fraction est seul approché, l'erreur relative du quotient est-elle plus grande ou plus petite que l'erreur relative du dénominateur?*

Nous allons, pour résoudre cette question considérer deux cas : supposons d'abord le dénominateur approché par défaut. Alors le quotient est approché par excès. Soient $\frac{a}{b - \beta}$ et $\frac{a}{b}$ les valeurs approchées et exactes du quotient L'erreur absolue commise sera

$$\frac{a}{b - \beta} - \frac{a}{b} = \frac{a\beta}{b(b - \beta)}.$$

L'erreur relative sera le quotient de cette quantité par $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire $\frac{\beta}{b - \beta}$. On verrait de même que, si le dénominateur eût été connu par excès, l'erreur relative du quotient eût été $\frac{\beta}{b + \beta}$. Donc, dans tous les cas, l'erreur relative du quotient est égale *au rapport de l'erreur absolue du facteur inexact à sa valeur approchée.* — En comparant ce résultat à l'erreur relative du diviseur, on voit que l'er-

reur du quotient sera supérieure ou inférieure à l'erreur relative du diviseur, suivant que celui-ci sera connu par défaut, ou par excès.

5. *Le rayon exact d'un cercle est* 4,325. *Calculer sa surface à un centimètre carré près.*

La meilleure manière de résoudre cette question est de calculer d'abord le carré du rayon ; puis, par la méthode de la multiplication abrégée, de déterminer la surface au degré d'approximation demandé.

6. *On donne le rayon d'un cercle à un centimètre près. On demande de calculer la circonférence avec toute l'approximation possible.*

En disposant la multiplication abrégée comme on peut la faire, en plaçant le chiffre des unités du multiplicateur sous le chiffre qui indique des unités dix fois plus petites que l'approximation, on voit que si l'on veut ne perdre aucun chiffre du multiplicande, on peut compter seulement sur les dixièmes au produit.

7. *Une circonférence de cercle vaut* 60 *mètres. Calculer le rayon à* 0,001.

En cherchant la partie entière du quotient on trouve que cette partie entière est 9.

Donc, l'erreur relative du quotient sera moindre que $\frac{1}{9000}$. Par suite, il faudra que l'erreur relative du diviseur ne dépasse pas cette valeur. Il en résulte que l'erreur absolue du diviseur ne devra pas être supérieure à $\frac{1}{3000}$ Donc, il faudra que l'on prenne quatre chiffres décimaux au diviseur.

8. *Calculer à* 0,001 *le rayon du cercle dans lequel le segment de* 90° *est égal à un mètre carré.*

Le segment correspondant à 90° dans un cercle de rayon R a pour expression $\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$ ou $\frac{R^2}{4}(\pi - 2)$. Donc on aura, dans l'exemple qui nous occupe,

$$R = \sqrt{\frac{4}{\pi - 2}}.$$

Or, comme $\frac{4}{\pi - 2}$ est supérieur à 1, mais inférieur à 4, la partie entière est 1, et par suite, l'erreur relative commise sur R sera $\frac{1}{1000}$. Donc, l'erreur commise sur le carré, ou sur la quantité sous le radical, devra être double de la précédente, c'est-à-dire que sa limite supérieure sera $\frac{1}{500}$. Il en résulte que l'erreur relative commise sur $\pi - 2$ devra être inférieure à cette dernière valeur, et comme la partie entière de cette différence est moindre que 5, il faudra avoir trois chiffres décimaux au diviseur.

9. *Calculer à* 0,001 *le rayon du cercle dans lequel le segment dont la corde est le rayon est égal à un mètre carré.*

En cherchant, comme dans l'exemple précédent, l'expression générale de ce segment, nous le trouvons égal à $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$. Donc on aura ici à trouver, à un millimètre près, la valeur de l'expression

$$\sqrt{\frac{12}{2\pi - 3\sqrt{3}}}.$$

Nous remarquerons que, si nous effectuons avec une décimale la racine carrée de 27, nous trouvons à peu près 10 pour le quotient; donc sa racine carrée sera environ 3. Par suite, l'erreur relative du rayon devant être inférieure à $\frac{1}{3000}$, l'erreur relative du carré devra être inférieure à $\frac{1}{1500}$. Nous pourrons affirmer que cette condition est remplie si nous calculons $3\sqrt{3}$ avec quatre chiffres décimaux. En effet, nous pouvons admettre que nous savons déterminer 2π avec autant de décimales que nous le voudrons, et comme la différence $2\pi - 3\sqrt{3}$ est égale à 1,09..., si nous prenions seulement trois chiffres décimaux, l'erreur relative ne serait pas inférieure à $\frac{1}{1500}$; nous ne pourrions donc pas affirmer que nous avons atteint la limite demandée.

10. *Calculer à* 0,001 *la valeur de*

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

Pour résoudre cette question, nous allons commencer par nous occuper de la dernière racine, et prouver qu'en extrayant cette dernière racine avec trois chiffres décimaux, nous sommes sûrs d'arriver à la limite indiquée. En effet, si nous prenons l'expression $2 + \sqrt{2}$, sa valeur étant supérieure à 3, en prenant trois chiffres décimaux, nous aurons une erreur relative moindre que $\frac{1}{3000}$. Donc, sa racine aura une erreur relative moindre que $\frac{1}{6000}$, et comme son premier chiffre est un 1, on peut compter sur trois chiffres décimaux. Donc, l'opération suivante aura la même approximation que la première, et ainsi de suite. Par suite, autant nous aurons pris de chiffres décimaux à la première extraction de racine, autant nous en aurons à la fin. Donc, en faisant le calcul comme nous l'avons indiqué, nous sommes bien assurés d'arriver au résultat demandé.

Nous nous contenterons d'indiquer ici ces exemples, qui, comme nous l'avons dit en commençant, ont été donnés aux examens oraux de Saint-Cyr, et qui permettront aux élèves de voir comment on peut traiter les questions d'approximation qui font partie des programmes de mathématiques élémentaires.

A. M.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

FACULTÉ DE POITIERS

Session d'avril 1878.

Résoudre l'équation $\frac{\cos x}{3} - \frac{\sin x}{2} = \frac{1}{5}$

On fait tourner un triangle isoscèle autour de sa base, quel doit être le rapport de la hauteur à la base et par suite le demi-angle au sommet pour que la surface ainsi engendrée soit équivalente à celle de la sphère ayant la base du triangle pour diamètre.

Construire un rectangle connaissant le demi-périmètre et la surface.

La latitude de Poitiers est de 46° 34′ 53″ quelle sera la hauteur méridienne du soleil, le jour où cet astre aura une déclinaison boréale de 23° 28′; en déduire la longueur de l'ombre méridienne d'une tige verticale de 1 mètre ce jour-là.

Étant donné un demi-cercle de rayon r, trouver la longueur de la corde CD parallèle à AB et telle que le trapèze ABCD ait un périmètre donné $2p$; maximum ou minimum de p.

15 juillet 1878.

1° Étant donné le trinome $ax^2 + bx + c$,
dans lequel on suppose $b^2 - 4ac$ différent de zéro, de quelle quantité faudrait-il augmenter également les trois coefficients a, b, c pour qu'en égalant le nouveau trinome à zéro, l'équation obtenue ait ses racines égales?

2° La latitude de Poitiers est 46° 34′ 55″; de combien s'est accrue dans cette ville l'ombre méridienne d'une tige verticale de 2 mètres du 1er au 20 juin, sachant que la déclinaison du soleil était 22° 5′ à la 1re date et 23° 27′ à la seconde?

17 juillet 1878.

Quelle est la nature du mouvement d'un point pesant sur un plan incliné parfaitement poli?

Dans un plan vertical on donne un cercle dont le diamètre AB est vertical et une corde quelconque AM, faisant un angle α avec AB; quel est le temps employé par un point pesant à parcourir la corde AM. — Que peut-on conclure du résultat?

A quelle distance du centre d'une sphère se trouve le sommet d'un cône circonscrit, sachant que si son sommet s'éloigne du centre d'une distance égale à la 1/2 du rayon, la surface de la calotte sphérique circonscrite augmentera de la 12° partie de la surface sphérique? — Interprétation et vérification du résultat.

18 juillet 1878.

1° Quelle est la plus petite valeur que puisse prendre l'expression $2x^2 - 5x + 7$, quand on attribue à x des valeurs réelles.

2° Sachant que

$$\operatorname{tg}(a + x)\operatorname{tg}(a - x) = \frac{1 - 2\cos 2a}{1 + 2\cos 2a}$$

calculer $\sin x$.

19 juillet 1878.

D'un point M pris extérieurement dans le plan d'une ellipse on mène les tangentes MT, MT′ respectivement voisines des foyers F, F′; soient de plus G le point symétrique de F par rapport à MT; G′ le symétrique de F′ par rapport à MT′; on joint FG′ et F′G. Démontrer : 1° l'égalité des triangles FMG′, F′MG; 2° l'égale inclinaison de MF, MF′ sur MT, MT′; 3° faire voir que si les tangentes MT, MT′ sont à angle droit $\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 = 4a^2$. En conclure le lieu des points d'où l'on peut mener des tangentes rectangulaires à l'ellipse.

Résoudre l'équation $7 \sin x + 6 \cos x = 9$.

22 juillet 1878.

Définition des progressions géométriques. — Démontrer que si la raison est plus grande que l'unité, les termes vont en croissant au delà de toute limite; — qu'arrive-t-il si la raison est plus petite que l'unité.

Somme des termes. — Application à la détermination de la limite d'un quotient décimal périodique.

Etant donnés deux cercles dont les rayons sont R et R' et la distance des centres D; on prend un point M sur la ligne des centres et de ce point on mène une sécante qui coupe les deux circonférences; quelle doit être l'inclinaison de cette sécante sur la ligne des centres, pour que les cordes interceptées sur cette sécante soient égales.

24 juillet 1878.

Dans une demi-circonférence de diamètre AB on inscrit un demi-hexagone régulier ACDB, et on circonscrit le demi-hexagone régulier ayant ses côtés parallèles à ceux du premier; trouver en fonction du rayon l'expression du volume engendré par l'aire comprise entre les deux demi-polygones tournant autour de AB.

Condition d'équilibre ou de mouvement uniforme du treuil à roue.

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE SAINT-CYR

(*Suite*, voir page 249 et 279.)

— Mener un plan parallèle à la base d'un cylindre, de manière qu'il divise sa surface convexe en deux parties telles que la base du cylindre soit moyenne proportionnelle entre elles.

— Circonscrire à une sphère un cône droit dont la surface convexe soit double de la base.

— Inscrire dans une sphère un cône dont la surface convexe soit équivalente à celle de la calotte sphérique qui est terminée au même cercle.

— Couper une sphère par un plan tel que la section soit équivalente à la différence des deux zones dans lesquelles le plan partage la surface de la sphère.

— Couper une sphère par un plan tel que l'aire d'un grand cercle soit moyenne proportionnelle entre les deux zones que ce plan détermine.

— Couper une sphère par deux plans parallèles et également éloignés du centre de la sphère, de manière que la somme des aires des deux sections soit égale à l'aire de la zone comprise entre les deux plans.

— Soient B, b les deux bases, H la hauteur d'un tronc de pyramide à bases parallèles; couper ce tronc par un plan parallèle aux bases en deux parties proportionnelles à m et n.

— Inscrire dans un triangle un rectangle, tel que, en le faisant tourner autour du côté commun, la surface totale du cylindre ait une valeur donnée.

— Parmi tous les rectangles qu'on peut inscrire dans un triangle donné, quel est celui qui est le plus grand? Quel est le plus grand carré inscrit dans un triangle?

— Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, ou de même surface, quel est celui dans lequel la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit est un maximum?

— Parmi tous les triangles rectangles dont la somme des côtés de l'angle droit est constante, quel est celui dans lequel la différence entre l'hypoténuse et la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit est un minimum?

— Décomposer un nombre en deux parties, telles que la somme des quotients obtenus en divisant chacune de ces parties par l'autre soit un minimum.

— Inscrire dans un cône droit un cylindre dont la surface latérale ou la surface totale soit maximum ou minimum.

— Calculer le rayon du segment sphérique maximum parmi les segments sphériques qui sont terminés par des zones de surface constante à une base.

— Inscrire dans une sphère un cylindre dont le volume soit dans un rapport donné avec celui de la sphère. Maximum de ce rapport.

— Quel est le plus grand triangle isoscèle que l'on puisse inscrire dans un cercle.

— Maximum de l'aire d'un trapèze isoscèle dont la petite base a et la longueur commune c des côtés non parallèles restent constantes.

— Inscrire dans un cône droit un cylindre de volume maximum.

— Inscrire dans une sphère un cylindre dont la surface latérale ou totale soit maxima.

— Maximum du volume d'un cône dont on connaît la surface totale.

— Maximum du volume d'un cône dont l'arête est donnée.

— Circonscrire un cône minimum à une sphère donnée.

— Parmi tous les cônes inscrits dans une sphère donnée, quel est celui dont la surface latérale est un maximum?

— Parmi tous les triangles ayant même base et même angle au sommet, quel est le maximum?

— Dans la plus grande base d'un tronc de cône, on considère un petit cercle c concentrique à cette base comme la plus petite base d'un nouveau tronc de cône qui aurait pour autre base la base supérieure du tronc primitif. Déterminer c de façon que le volume de ce nouveau tronc de cône soit la moitié du volume du tronc de cône primitif.

— Étant données deux tangentes aux extrémités d'un diamètre, mener une troisième tangente qui détermine avec les deux premiers et le diamètre un trapèze de périmètre donné et de surface donnée.

— Étant donnée une corde AB d'un cercle, trouver sur la circonférence un point M, tel que $MA^2 + MB^2$ soit égal à un carré donné.

— Étant données deux parallèles et deux points A et B sur l'une d'elles trouver sur l'autre un point M tel que $MA^2 + MB^2 = K^2$.

— Inscrire dans un cercle un triangle isoscèle connaissant la somme de la base et de la hauteur.

— Étant données deux parallèles en deux points A et B sur l'une, trouver sur l'autre un point M tel que MA soit double de MB.

— Inscrire dans un demi-cercle un trapèze de périmètre donné.

— On donne un demi-cercle AOB, on mène par le point A une corde AD; du point D on abaisse DE perpendiculaire sur AB et l'on demande quelle serait la position de AD pour que $AD = EB$.

— On donne un demi-cercle AOB et on propose de mener une corde CD parallèle à la base, telle que, en menant AC, la différence entre CD^2 et AC soit égale à un carré donné.

— On donne un triangle ABC. Mener une parallèle DE à la base, telle que $DE^2 - BD^2 = K^2$.

— Dans un triangle isoscèle, mener une parallèle DE à la base BC de telle sorte que $DE^2 + BD^2 + CE^2 = K^2$.

— Étant donné un demi-cercle ABC, mener une corde AC, telle que en abaissant CD perpendiculaire sur le diamètre AB et en faisant tourner autour de AB le volume du cône engendré par le triangle ACD soit maximum.

— On donne un point P dans l'intérieur d'un triangle rectangle et l'on demande de mener par ce point une sécante, telle que la somme des segments qu'elle détache sur les côtés de l'angle droit soit donnée.

— Mener dans une circonférence O une corde AB telle que la surface du triangle AOB soit donnée.

— On prend un point P sur la bissectrice d'un angle droit CAB; mener par le point P une droite CB^2 telle que $PC^2 + PB^2 = K^2$.

— Mener dans un cercle une corde CD parallèle au diamètre AB de telle sorte que $CD = AC + BD$.

— On donne un quart de cercle BOA; par le point B, on mène une tangente au cercle; on prolonge le rayon OA, et on propose de mener une tangente DCE telle que la surface du trapèze OBDE soit la plus petite possible.

— Étant données deux droites rectangulaires et deux points A et B sur l'une d'elles, trouver sur l'autre un point C d'où l'on voie le segment AB sous un angle donné. Maximum de cet angle.

— Inscrire dans un secteur circulaire un rectangle de surface donnée ayant deux sommets sur l'arc qui limite le secteur.

— Une ligne droite MN est perpendiculaire au point M à un plan P. D'un point A de ce plan on voit MN sous un angle α; par le point A, on mène dans le plan une droite faisant avec AM un angle ω et l'on prend sur cette droite la longueur $AB = a$. Du point B on voit MN sous un angle β; cela posé, on demande de calculer la longueur de MN en fonction des données α, β, ω, a.

— Étant données deux parallèles AB, CD, et deux points M et N sur la parallèle équidistante, on demande de mener par le point M une droite telle que le segment compris entre AB et CD soit vu de N sous un angle de 45°.

— Étant données deux droites AB, CD perpendiculaires à un même plan et telles que $AB = 2CD$; par le point A, on mène dans le plan une droite AM faisant avec AC un angle α. On demande de déterminer un point M sur cette droite telle que les angles AMB, CMD soient égaux.

— Étant données deux droites parallèles AB, CD, un point P dans leur plan, quelle position faut-il donner à la plus courte distance entre ces deux droites pour qu'elle soit vue du point P sous un angle donné?

— La hauteur d'un cône est 10 mètres, le rayon de la base est 5 mètres, trouver à quelle distance de la base il faut mener un plan parallèle pour que le volume du tronc de cône soit 20 mètres cubes.

— Une sphère étant donnée, on la coupe par un plan, et on supprime le petit segment que l'on remplace par un cône droit de même base. On demande à quelle distance doit être placé le sommet de ce cône pour que

le corps composé de ce cône et du grand segment ait même surface que la sphère.

— Partager par un plan la surface d'une sphère en deux parties qui aient pour moyenne géométrique le tiers du cercle qui les sépare.

(A suivre).

CONCOURS GÉNÉRAUX

CONCOURS DE 1847

Philosophie.

Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle, on forme un second triangle ABC, dont les sommets A, B, C sont les points milieux des côtés du premier. Des sommets de ce second triangle, on mène au cercle les tangentes A*a*, B*b*, C*c*, qui rencontrent respectivement en *a*, *b*, *c* les côtés opposés à ces sommets.

On demande de prouver que ces trois points sont en ligne droite.

CONCOURS DE 1867

Classe de troisième.

1. Étant donnés trois points A, B, C en ligne droite, on fait passer par A et B une circonférence de cercle et l'on joint le point C au milieu I de l'arc AB.

On demande le lieu du point M où la ligne IC vient couper la circonférence.

2. Les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle évalués en anciennes mesures ont été trouvés de 13 toises et de 11 toises, 4 pieds, 5 pouces.

Exprimer en mesures anciennes et nouvelles l'hypoténuse de ce triangle.

Classe de seconde.

Étant donnés un cercle et un diamètre AB de ce cercle, trouver le lieu géométrique du point M, tel que la surface du triangle MAB soit égale à la surface du carré construit sur MT menée au cercle par le point M et terminée au point de contact T. *(Voir question 34, t. Ier, p. 96.)*

Classe de rhétorique.

Étant donnés un carré ABCD et une droite AX menée par le sommet A dans le plan de ce carré, on demande de construire, sur le côté BC comme base, un triangle isoscèle BCM, de telle manière que ce triangle et le carré donné engendrent des volumes égaux en tournant autour de la droite AX.

Philosophie.

Étant donné un quadrilatère ABCD, trouver dans l'intérieur un point S, tel que si on le joint à tous les sommets les aires des quatre triangles ainsi formés soient égales deux à deux.

ASB = CSD
ASC = BSD

Mathématiques élémentaires.

Dans un tétraèdre SABC, on a :

SA = 4
BA = 3
AC = 2

de plus on sait que les angles SAB, SAC, SCB sont droits tous les trois.

La tétraèdre est-il déterminé dans toutes ses parties ?

Calculer la somme des trois angles BSC, BSA, CSA qui ont tous leur sommets en S.

Étant donnés les trois côtés d'un triangle rectangle, calculer les rayons de quatre cercles qui les touchent tous trois en dedans ou en dehors du triangle et prouver que l'un de ces rayons égale la somme des deux autres.

Mathématiques élémentaires (Départements).

Une droite BC, de longueur constante, se déplace en s'appuyant constamment sur deux droites fixes AB, AC, situées dans un même plan.

Les différents points du plan étant supposés invariablement liés à la droite BC, et emportés avec elle dans son mouvement, on demande : quels sont ceux de ces points qui décriront soit une ligne droite soit une circonférence ?

PROBLÈMES DE MÉCANIQUE

DONNÉS DANS DES CONCOURS OU EXAMENS

On fait tourner, à l'aide d'une fronde, une pierre du poids de 1 kilog. dans un cercle de 1^m50, de rayon ; la corde de cette fronde ne peut supporter qu'une tension maximum de 60 kilog. Cette corde se rompt au moment où la pierre atteint le point C, placé de façon que CB = CA, AB étant le rayon horizontal. On demande la hauteur maximum à laquelle s'élèvera la pierre et l'amplitude du jet. On négligera la résistance de l'air.

(*Concours académique de Bordeaux, 1877.*)

Étant donnés deux plans inclinés AB, AC, ayant une hauteur AD, et formant avec le plan horizontal BC les angles ACD, ABD complémentaires et dans le rapport de 1 à 2, on laisse tomber du point A simultanément trois corps, l'un suivant AC, l'autre suivant AB, et le troisième suivant la verticale AD. La vitesse initiale est nulle, on néglige les résistances, et l'on donne l'intensité de la pesanteur 9.8088. On demande : 1° de déterminer

les positions L, M, P des trois corps après une chute de 3 secondes, et de calculer les côtés et les angles du triangle LMP que l'on obtient en joignant deux à deux les points L, M, P par des droites; 2° de démontrer que quel que soit le temps de la chute, LMP reste toujours semblable à lui-même, et que son aire est proportionnelle à la 4° puissance du temps.

(*Concours académique d'Aix*, *1877.*)

On donne un plan incliné de hauteur h et d'inclinaison α, et l'on propose: 1° de déterminer le temps qu'un mobile pesant parti sans vitesse du sommet A, met à parcourir une portion $GH = s$ du plan, le point G étant à une distance connue a du sommet; 2° de déterminer la position du point G de telle sorte que en faisant $GH = h$, le temps employé à parcourir GH pour le mobile parti du point A, soit le même que le temps qu'un autre mobile mettrait pour tomber librement de la hauteur h.

(*Diplômé de fin d'études enseignement spécial*, *Bordeaux 1874.*)

Trois aiguilles se meuvent uniformément sur le cadran d'une horloge; la première, qui indique les heures, fait le tour du cadran en 12 heures; la deuxième indique les minutes et fait le tour du cadran en une heure; enfin la troisième, qui indique les secondes, fait le même tour en une minute. On demande l'instant précis ou l'une quelconque des aiguilles fera le même angle avec la direction des deux autres.

(*Concours académique Clermont 1876.*)

Deux mobiles pesants sont lancés de bas en haut au même instant avec les vitesses respectives a et b. On demande après combien de temps la somme des carrés de leurs vitesses aura une valeur minima.

(*Baccalauréat ès sciences*, *avril 1877.*)

Trois forces appliquées en un même point libre O se font équilibre et sont représentées en grandeur et en direction par les droites AO, BO, CO. Démontrer : 1° que ces forces sont proportionnelles aux côtés du triangle qui seraient respectivement parallèles ou perpendiculaires aux lignes AO, BO, CO; 2° que le point O est le centre de gravité du triangle ABC.

(*Concours académique*, *Clermont*, *1876.*)

Un corps lancé sur un parquet uni et horizontal parcourt en glissant $1^m,80$ et s'arrête à cause du frottement. Calculer sa vitesse initiale, en supposant le coefficient de frottement de 0,25. (*Concours général*, *1875.*)

On donne un plan incliné AB de longueur l, incliné de 30° sur l'horizon. Un corps placé en B tombe en vertu de son propre poids et en même temps un mobile parti de A est lancé avec une vitesse initiale v_0. En quel point les deux mobiles se rencontrent-ils? Quelle devrait être la valeur v_0 pour que la rencontre eût lieu au milieu du plan?

(*Concours académique*, *Paris*, *1875.*)

Une barre homogène ABC dont l'unité de longueur pèse a kilogrammes et dont l'extrémité A est fixe, fait un angle de 30° avec l'horizon, et supporte en un point B de sa longueur un poids P, tandis qu'une force Q, agissant perpendiculairement à la direction de la barre, à l'extrémité C, est destinée à maintenir l'équilibre. Calculer la longueur AC de la barre. — Conditions de possibilité du problème. (On ne fera pas usage de la trigonométrie.)

(*Concours académique*, *Montpellier*, *1875.*)

On demande avec quelle vitesse devrait être lancé verticalement un boulet de canon, pour qu'il pût s'élever à une hauteur de 400 mètres, abstraction faite de la résistance de l'air. Quel serait l'intervalle entre le départ et la chute. (*Concours académique*, *Clermont*, *1874.*)

Une barre homogène s'appuie par ses extrémités sur deux plans inclinés et elle est perpendiculaire à leur intersection, qui est horizontale. Déterminer la position d'équilibre et les pressions exercées sur les deux plans Trouver la condition que doivent remplir les plans: 1° pour que la barre soit horizontale; 2° pour que la verticale de son centre de gravité tombe sur l'intersection des deux plans.

— Un corps M pesant 18 kilog. est posé sur une table triangulaire ABC supportée par trois pieds verticaux, fixés à ses trois sommets. Le point M où la table est rencontrée par la direction du poids du corps, se trouve sur la hauteur AI du triangle ABC. On sait que AM = 0m,375, AI = 0m,855, AB = 2m,502, AC = 1m,243. On demande les pressions supportées par chacun des pieds de la table. (*Concours académique de Rennes, 1872.*)

— On pose une barre AB, droite et homogène, d'un poids donné P, de manière qu'elle appuie son extrémité B contre un mur vertical BC et son extrémité inférieure A sur un sol horizontal. Elle est d'ailleurs dans un plan vertical perpendiculaire au mur. On demande 1° quel est l'angle α le plus grand qu'elle puisse faire avec le mur sans tomber, connaissant ses deux coefficients de frottement et f' par rapport au sol et au mur, c'est-à-dire les quotients respectifs des résistances F et F' que le sol et le mur opposent au glissement de la barre par les réactions normales correspondantes N et N' du sol et du mur; 2° les valeurs de ces réactions normales au moment où l'angle α atteint sa valeur maximum; 3° dans l'hypothèse de $f = f$, on demande quelle relation il y a entre l'angle limite α et l'angle commun de frottement. (*Thabourin*).

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le **Dr Henri Suter**, de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon.

(*Suite*, voir page 281.)

LA SCIENCE CHEZ LES GRECS

Son importation. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie.

Toutefois, d'après les récits de *Proclus* et quelques passages des *Collect. Math.* de *Pappus*, nous savons que ce nouveau moyen de démonstration de l'école platonicienne, était usité comme le procédé synthétique des anciens géomètres et comme celui d'Euclide, et nous le plaçons encore aujourd'hui entre les méthodes analytique et synthétique; dans la deuxième de ces méthodes, on part des principes didactiques et fondamentaux déjà connus pour arriver, par

une progression convenable, à la preuve de la proposition à démontrer; dans la première, on croit avoir envisagé la géométrie dans son ensemble, et, par des réductions à opérer sur les vérités fondamentales, on cherche à découvrir de nouveaux résultats.

L'analyse présente sur la synthèse ce grand avantage qu'elle peut être employée avec le plus grand succès dans les recherches où il faut creuser profondément le sujet; elle permet d'aborder les questions difficiles et complexes dont on peut le plus souvent extraire de nouvelles propriétés; elle porte avec elle la découverte de nouvelles propositions qui se révèlent d'elles-mêmes sans qu'on ait souvent pu penser à leur existence, parce qu'elles n'ont aucun rapport immédiat ou même rapproché avec le sujet traité. — En ce qui concerne la clarté, la méthode synthétique est loin de lui être inférieure.

Les anciens connaissaient aussi un autre mode de démonstration vraisemblablement le plus ancien, mais aussi le plus imparfait de tous; il est connu sous le nom de « *Réduction à l'absurde* ». Il consiste à montrer qu'une hypothèse étant prise comme point de départ, si l'on est conduit à quelque chose d'absurde, on doit considérer les autres hypothèses comme exactes. Nous trouvons cette méthode très-souvent employée par les géomètres qui ont précédé et aussi par ceux qui ont suivi *Platon*.

A la découverte de cette nouvelle méthode analytique sont intimement liés les efforts de Platon pour définir, d'après des principes scientifiquement plus exacts, les notions fondamentales en géométrie; pour édifier l'ensemble des mathématiques d'après des procédés plus logiques et plus systématiques. Jusqu'à cette époque subsistent des lacunes importantes dans la manière de formuler les définitions et de disposer méthodiquement les théorèmes et les problèmes. C'est seulement à dater de Platon que la logique rigoureuse dans l'art de penser commence à exercer son influence bienfaisante en développant la science d'une façon plus suivie, plus logique. C'est avec Euclide que ce développement atteint son point culminant.

C'est encore à Platon qu'est due la première impulsion donnée à l'étude et à un développement plus complet de le stéréométrie ; celle-ci était, à son époque, notablement en arrière des autres parties des mathématiques. Les théorèmes relatifs au cylindre, à la pyramide et au cône étaient très-peu avancés ; les Pythagoriciens avaient bien, dans une certaine mesure, considéré les corps réguliers et les sphères, mais très-peu au point de vue géométrique. Or c'est principalement aux recherches sur le cône que nous devons la découverte des sections coniques, et cette découverte fait le plus grand honneur à l'école platonicienne.

Les écrivains de l'antiquité et des temps modernes sont unanimes à attribuer cette découverte à *Menœchme*, élève de *Platon*. Selon *Proclus (Comm. in Eukl.) Eratosthène*, ainsi que *Geminus*, nommaient *Triades Menœchmiques* (Μεναιχμειουσ τριάδασ) les trois courbes provenant de l'intersection d'un cône et d'un plan. *Eutokius* nous a conservé un extrait de la géométrie de *Geminus* ; il nous montre comment *Menæchme* concevait l'origine de ces courbes et comment il les définissait. Les Grecs avant *Appollonius* ne connaissaient que le cône droit engendré par la révolution d'un triangle rectangle autour d'un côté de l'angle droit, et ils distinguaient trois sortes de ces cônes : le cône à angle aigu, le cône rectangle et le cône à angle obtus, selon que l'angle au sommet générateur est inférieur, égal ou supérieur à 45°. Chacun de ces cônes ne leur fournissait qu'un genre de sections coniques ; car dans les trois cas, ils plaçaient le plan de la section perpendiculaire à la ligne génératrice de la surface latérale, c'est-à-dire à l'hypoténuse. Le cône à angle aigu leur donnait l'ellipse ; le cône rectangle, la parabole ; le cône à angle obtus, l'hyperbole. Mais jusqu'à *Apollonius*, on ne connaissait pas encore les noms ; on nommait les sections coniques d'après leur origine : la section du cône aigu « ἡ τοῦ ὀξυγωνιου κώνου τομὴ » — la section du cône rectangle « ἡ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομὴ » — et la section du cône obtus « ἡ τοῦ ἀμβλυγωνιου κώνου τομὴ », — c'est-à-dire la section du cône aigu, rectangle ou obtus.

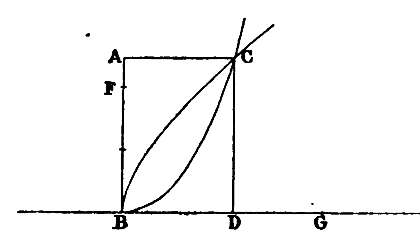
Archimède lui-même, dans les écrits duquel on a trouvé déjà du reste le mot d'ellipse, rapportait encore à trois

cônes l'origine de ces sections; c'était à ce grand géomètre qu'il était réservé de montrer pour la première fois, que les trois sections peuvent s'obtenir sur le même cône, en orientant convenablement le plan sécant par rapport à la génératrice.

Nous en resterons là au sujet de cette définition des sections coniques par *Menæchme*. Jusqu'à quel point ce mathématicien s'est-il avancé dans l'étude et la découverte des propriétés de ces sections? La question est difficile à décider. Cependant nous apprenons par le témoignage d'Appolonius, que les quatre premiers livres des sections coniques de *Menæchme* contiennent à peu près ce qui était déjà connu avant lui. Mais les deux solutions remarquables du problème de la duplication du cube qui ont été trouvées par *Menæchme* et qui nous ont été conservées par *Eutokius* (*Comm. in lib. II Archimedis de sphaer. et cyl.*), nous éclairent et nous fournissent de plus amples renseignements.

Hippocrate, nous le savons, avait ramené ce problème à la découverte de deux lignes moyennes proportionnelles entre deux droites données. *Menæchme* résolut la question de deux manières à l'aide des sections coniques. Dans le premier procédé, il employait deux paraboles; et dans le second, une parabole et une hyperbole. Nous reproduisons la première solution d'après *Eutokius*.

Soient BF et BG (figure ci-contre) les droites données, portées sur deux axes rectangulaires. En prenant BD pour axe et BG pour paramètre, décrivons une parabole. De même avec BA pour axe et BF pour paramètre, décrivons une seconde parabole. Ces deux courbes se coupent en C. Menons les droites CA et CD parallèles aux axes. D'après la propriété de la parabole :



$$BF : AC = AC : AB,$$

et de même : $$BG : CD = CD : BD.$$

Il en résulte (car AC = BD et AB = CD) la proportion continue : BF : AC = AC : CD = CD : BG,
c'est-à-dire que AC et CD sont les deux lignes cherchées, moyennes proportionnelles entre BF et BG.

L'autre solution repose sur cette même propriété de la parabole, et sur celle de l'hyperbole, d'après laquelle le rectangle ou le parallélogramme formé par les asymptotes et les parallèles menées d'un point quelconque de l'hyperbole aux asymptotes, est constant.

Ces solutions de *Menœchme* supposaient déjà une connaissance assez approfondie des propriétés des sections coniques. La seconde solution nous montre que *Menœchme* connaissait déjà les asymptotes de l'hyperbole. Mais nous ne trouvons aucune trace de foyer et de tangentes. *Eratosthène* remarque, en un endroit, que *Menœchme* s'est servi d'instruments pour la construction de ses courbes; mais il ne dit pas quelle était la forme de ces instruments.

Platon, du reste, avait déjà résolu, avant *Menœchme*, le problème de deux lignes moyennes proportionnelles, à l'aide d'un instrument composé de deux règles droites qui pouvaient être déplacées parallèlement l'une à l'autre entre les coulisses de deux autres règles perpendiculaires aux premières. La solution consistait alors à employer deux fois cette proposition, que la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, est la moyenne proportionnelle entre les segments de l'hypoténuse. Nous aurons plus loin l'occasion de parler de quelques autres solutions, non moins intéressantes, de ce problème.

Dinostrate, connu par sa solution de la quadrature du cercle au moyen de la quadratrice découverte par *Hippias* en vue de la section de l'angle, était frère de *Menœchme* et élève de *Platon*. *Pappus* (*Coll. Math.* Lib. IV) nous donne la solution de *Dinostrate*. Voici en quoi elle consiste :

Dans la quadratrice dont nous avons déjà donné la construction (1), on a :

$$BED : AD = AD : AG$$

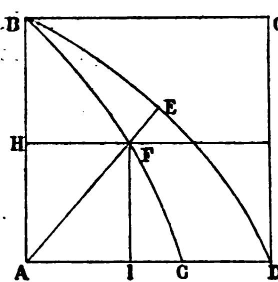
---

(1) Mai 1878, page 138. — Nous reproduisons la figure. — M.

d'ou, pour le quadrant circulaire BED :

$$BED = \frac{\overline{AD}^2}{AG}.$$

La quadrature du cercle serait donc possible, si le point G de la quadratrice pouvait être déterminé géométriquement avec exactitude. La proposition précédente repose sur cette conclusion: plus le diamètre AE se rapproche de la position AD, plus le rapport ED : FI se rapproche du rapport AD : AG.



Platon était l'ami du pythagoricien *Archytas* de Tarente. *Diogène Laerte* (Lib. VIII) dit de lui qu'il a le premier appliqué les principes fondamentaux de la géométrie à l'étude de la mécanique et qu'il a de même appliqué la mécanique à la construction de figures géométriques. Il aurait trouvé de cette manière, par la section du demi-cylindre, deux moyennes proportionnelles pour la duplication du cube ; il aurait été aussi le premier conduit au *cube* par des considérations géométriques : « καὶ γεωμετρία πρῶτος κύβον εὗρεν. »

Que doivent entendre le savants par cette dernière indication? Pour la plupart elle n'est pas claire. Bretschneider en arriva même à supposer qu'elle contient une allusion au cube (dé) à jouer, ou bien que c'est par plaisanterie que *Diogène Laerte* fait allusion au cube. La chose nous paraît exiger de plus grands éclaircissements.

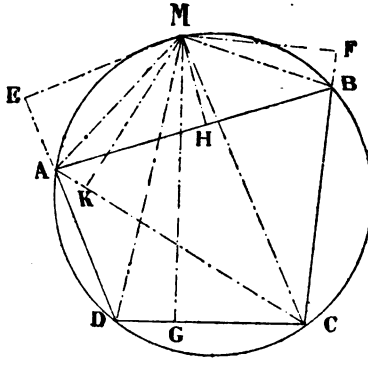
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 111.

Solution par M. Locherer, élève du lycée de Dijon.

Les projections d'un point de la circonférence circonscrite à un quadrilatère sur les quatre côtés déterminent huit segments tels que le produit de quatre segments non consécutifs est égal au produit des quatre autres. (Perrin.)

Soient *a*, *b*, *c*, *d*, les projections du point E sur les côtés AB, BC, CD, AE. Joignons BD et soit E*f* perpendiculaire sur BD. Les points *a*, *d*, *f* étant en ligne droite (droite de Simson), on a



$$Aa \cdot Bf \cdot Dd = Ba \cdot Df \cdot Ad$$

de même *b*, *f*, *c* étant en ligne droite, on a

$$Df \cdot Bb \cdot Cc = Bf \cdot Cb \cdot Dc$$

Multipliant membre à membre ces deux relations, il vient

$$Aa \cdot Bb \cdot Cc \cdot Dd = Ba \cdot Cb \cdot Dc \cdot Ad.$$

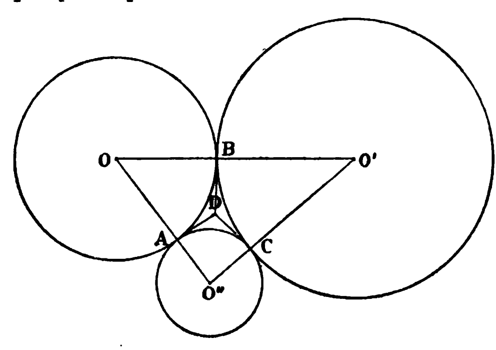
Nota. — **Ont résolu la même question : MM. d'Ocagne, collége Chaptal; Vautré, de Saint-Dié; Marcelin, de Cherbourg; Menand, de Dijon; Cordeau, école Lavoisier; Estienne, de Bar-le-Duc; Malessé, de Poitiers; Demortain, de Doullens; Renévey, Gubian, de Bourg; Lugol, Rey, du lycée Saint-Louis; Jiménez, à Bordeaux; Bruyand, de Troyes; Sou, collége de Libourne.**

QUESTION 112.

Solution par M. Locherer, élève du Lycée de Dijon.

Trois cercles sont tracés dans un plan de telle manière que chacun d'eux touche les deux autres; trouver le rayon du cercle qui passe par les points de contact des cercles, et celui du cercle qui passe par les centres.

Trouver aussi la surface du triangle obtenu en joignant les centres des trois cercles primitifs.



Les tangentes communes en A, B, C se rencontrent en un point D, qui est le centre de la circonfé-

rence passant par A, B et C, circonférence qui est en même temps inscrite dans le triangle $oo'o''$. Si r_1 désigne le rayon de cette circonférence, S la surface du triangle $oo'o''$, $2p$ le périmètre et r, r', r'', les rayons des trois circonférences,

on a $$r_1 = \frac{S}{p}.\ \text{Or}\ p = r + r' + r'',$$

$$S = \sqrt{p\,(p - oo')\,(p - oo'')\,(p - o'o'')} = \sqrt{rr'r''(r + r' + r'')}$$

dès lors $$r_1 = \sqrt{\frac{rr'r''}{r + r' + r''}}$$

Enfin R_1 étant le rayon de la circonférence circonscrite à $oo'o''$ on sait que $$R_1 = \frac{oo' \times oo'' \times o'o''}{4S}$$

$$= \frac{(r + r')\,(r + r'')\,(r' + r'')}{4\sqrt{rr'r''(r + r' + r'')}}$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Marcelin, de Cherbourg, Menand, de Dijon; d'Ocagne, collége Chaptal; Delarue et Duflot, lycée Condorcet; institution Marc-Dastès, Lafarge, lycée Henri IV; Cottereau, de Châteauroux; Guibant, de Bourg; Demarès, de Moulins; Radais, du Mans; Vitrac, d'Angoulême; Reuss, de Belfort; Bruyand, de Troyes; Malesset, de Poitiers; Rey, lycée Saint-Louis; Jou, collége de Libourne.

QUESTION 117.

Solution par M. Maurice d'Ocagne, élève du Collége Chaptal.

Dans un triangle rectangle, on abaisse la perpendiculaire DA = h *sur l'hypoténuse et l'on désigne par* r *et* r' *les rayons des cercles inscrits dans les triangles* ADB *et* ADC *et par* R *le rayon du cercle inscrit dans le triangle* ABC. *Démontrer les relations**

$$R^2 = r^2 + r'^2;\qquad R + r + r' = h\qquad \text{(Thual.)}$$

On sait que $$R = \frac{S}{\frac{a + b + c}{2}} = \frac{ah}{a + b + c}$$

---

* Le lecteur est prié de faire la figure.

de même $$r = \frac{S}{\frac{h + c + BD}{2}} = \frac{h \cdot BD}{h + c + BD},$$

or $$BD = \frac{c^2}{a}$$

donc $$r = \frac{hc^2}{a\left(h + c + \frac{c^2}{a}\right)} = \frac{hc^2}{ah + ac + c^2}.$$

ou comme $ah = cb$, $$r = \frac{hc^2}{bc + ac + c^2} = \frac{hc}{a + b + c}$$

On trouverait de même $$r' = \frac{hb}{a + b + c}$$

Je dis que $R^2 = r^2 + r'^2$. En effet,

$$R^2 = \frac{a^2h^2}{(a + b + c)^2}$$

et $$r^2 + r'^2 = \frac{h^2c^2 + h^2b^2}{(a + b + c)^2} = \frac{h^2(b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2}$$
$$= \frac{a^2h^2}{(a + b + c)^2}$$

on voit que les valeurs de R^2 et de $r^2 + r'^2$ sont identiques.

Maintenant,

$$R + r + r' = \frac{ha + hc + hb}{a + b + c} = \frac{h(a + b + c)}{a + b + c} = h.$$

Nota. — **Ont résolu la même question : MM. Huet, Gélinet, à Orléans; Reuss, à Belfort; Jiménez, à Bordeaux; Chrétien, au Havre; Sou, collége de Libourne; Schmitz, à La Rochelle; Menand, à Dijon; Demortain, à Doullens.**

QUESTIONS PROPOSÉES

124. — Construire un triangle dont on connaît la médiane et la bissectrice issues du sommet, ainsi que la différence des angles à la base. (*Gélinet.*)

125. — On donne, dans un cercle C, un diamètre DD′, et une corde KK′ perpendiculaire à ce diamètre. On prend sur la circonférence un point O, que l'on joint aux extrémités D'D′, K et K′ du diamètre et de la corde donnés.

Démontrer que la somme des projections OD et OD′ sur OK est égale à OK, et la différence des projections égale à OK′. (*Duval.*)

126. — Étant données deux circonférences tangentes extérieurement au point A, mener par ce point deux cordes dont les segments AB, AC, situés respectivement dans les deux circonférences, soient rectangulaires et égaux entre eux. (*Hallé.*)

127. — Étant donnés deux points A et B situés d'un même côté d'une droite CD, trouver sur cette droite un point M tel qu'en le joignant aux points A et B, l'angle AMC soit double de l'angle BMD. (*Giros.*)

128. — On a deux pentagones réguliers, l'un inscrit, l'autre circonscrit à un même cercle. On demande le rayon de ce cercle, sachant que la différence entre les périmètres des deux polygones est 1 décimètre, ou que la différence entre les surfaces de ces polygones est 1 décimètre carré. (*Chellier.*)

129. — Soient P, Q, R, les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de gravité d'un triangle ABC sur les côtés de celui-ci, T l'aire du triangle ABC, et a, b, c ses côtés ; l'aire du triangle PQR est égale à

$$\frac{4}{9}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\,\mathrm{T}.$$

(*Corresp. math. de Catalan.*)

130. — Soient menées dans un triangle ABC par les sommets et le centre de gravité S, les droites AS, BS, CS rencontrant les côtés opposés en a, b, c. Formons avec Aa, Bb, Cc, comme côtés, un triangle MNP. Les rayons R, r, r', r'', r''', des cercles circonscrits respectivement aux triangles ABC, MNP, BCS, CAS, ABS, satisfont à la relation

$$4\mathrm{R}r = 3r'r''r'.$$

(*Corresp. math. de Catalan.*)

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 16070-8.

THÉORIE DES AXES RADICAUX

Par **A. Morel.**

(*Suite*, voir pages 257 et 289.)

§ IV. *Du système de cercles passant par deux points réels.*

XX. Tous les cercles qui passent par deux points réels ont leur centre sur la droite perpendiculaire au milieu de la ligne qui joint les deux points. Ils ont même axe radical, par conséquent, si d'un point de l'axe radical comme centre, on décrit un cercle coupant orthogonalement l'un des cercles donnés, il les coupe tous orthogonalement.

Par un point quelconque du plan passe un cercle du système et un seul, dont la construction revient à la construction du cercle passant par trois points. Les rayons de ces cercles peuvent prendre toutes les valeurs comprises entre h et ∞, en appelant $2h$ la distance des deux points donnés. Si le point donné est sur l'axe radical, il n'y a point de cercle à proprement parler; mais on doit considérer l'axe radical, comme la limite d'un cercle du système dont le centre s'est éloigné indéfiniment.

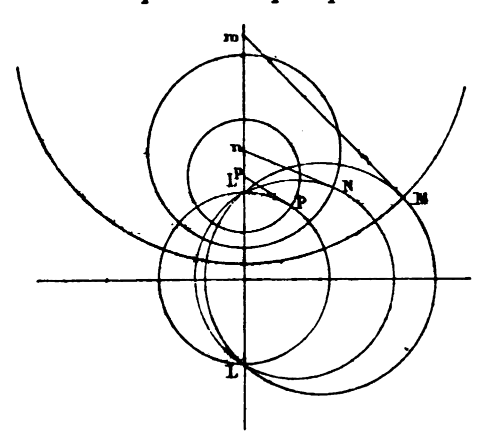
Parmi tous les cercles du système, il y en a deux qui touchent une droite ou un cercle donnés. Le problème revient à mener par deux points un cercle tangent à une droite ou à un cercle.

XXI. Si par un point de la corde commune, on mène des tangentes à tous les cercles du système précédent, les points de contact se trouvent sur un cercle ayant pour centre ce point et coupant orthogonalement tous les cercles donnés.

Inversement chacun des cercles du premier système coupe orthogonalement tous les cercles du second système, et la ligne des centres des cercles du premier système est l'axe radical commun de tous les cercles du second. Nous appellerons ces deux systèmes de cercles des *systèmes conjugués*. L'étude des propriétés des cercles ayant même axe radical,

se déduit immédiatement de leur considération. On aura, par conséquent, les propositions suivantes :

1° *Par un point* M *du plan passe un cercle du second système.* Pour le trouver, nous faisons passer par ce point M un cercle du premier système, auquel nous menons une tangente par le point M. Cette tangente rencontre en m la corde commune LL′; ce point m est le centre du cercle cherché.



Remarque. — Si le point M est confondu avec l'un des points L ou L′, le cercle se réduit à son centre, et par conséquent l'on peut considérer les points L et L′ comme deux cercles du second système, et ayant leur rayon nul. Poncelet les a appelés les *points limites* d'un système de cercles ayant même axe radical.

La construction même que nous venons d'indiquer, nous montre que, si dans les cercles du premier système on peut prendre comme centre un point quelconque de la droite OX, il n'est pas possible de prendre, pour centre d'un cercle du second système, un point de OY compris entre L et L′.

2° *Il existe deux cercles du second système tangents à une droite ou à un cercle donnés.* En effet, si je mène un cercle de ce second système, tangent au cercle donné, on pourra trouver un cercle du premier système passant par le point de contact, et coupant orthogonalement le cercle cherché, et par suite aussi le cercle donné. Il suffira pour cela de remarquer que ce cercle coupe orthogonalement le cercle donné et *deux quelconques* des cercles du second système. Son centre sera donc à la rencontre de OX et de l'axe ra-

dical du cercle donné et *d'un quelconque* des cercles du second système. Il sera donc facile à construire, et par suite on aura deux points de contact en menant de ce point des tangentes au cercle donné. On achèvera la construction en menant les rayons qui passent par ces points de contact jusqu'à la rencontre avec LL′. Les points ainsi obtenus seront les centres des cercles cherchés.

XXII. **Théorème.** — *La polaire de l'un des points limites par rapport aux cercles du second système, est la perpendiculaire à la ligne des centres passant par l'autre point limite.*

En effet, si sur LL′ comme diamètre on décrit une circonférence, elle coupe orthogonalement tous les cercles du second système, et la polaire du point L pris sur cette circonférence passe par le point L′ diamétralement opposé (13). Plus généralement, la polaire d'un point fixe P pour tous les cercles du second système passe par un point fixe Q, qui est le point diamétralement opposé du point P dans le cercle du premier système qui passe par les points P, L, L′.

La droite PQ est une tangente commune à deux cercles du second système. Les points de contact sont P et Q. En effet, ces deux points sont réciproques. Il existe deux cercles du second système tangents à la droite PQ. Les points de contact des tangentes menées de P sont sur la polaire de ce point, polaire qui passe par le point Q. Donc le point Q est un point de contact. On le montrerait de même pour P.

XXIII. Puisque la polaire d'un point fixe P passe par un point fixe Q, on a encore les deux théorèmes suivants :

Si d'un point P *on mène deux tangentes aux cercles du second système, le lieu du milieu de la corde de contact est la circonférence décrite sur* PQ *comme diamètre.*

Si d'un point A *quelconque on abaisse des perpendiculaires sur les polaires du point* P, *le lieu des pieds de ces perpendiculaires est encore un cercle.*

XXIV. L'ensemble de ces propriétés fait voir que l'on doit considérer les cercles du second système comme des cercles passant par deux points fixes λ, λ', dont le carré

de la distance est égal et de signe contraire à LL'^2. Ces points λ et λ' sont situés sur la droite OX. Tous les cercles du premier système sont définis par le segment LL′, et tous les cercles du second par le segment $\lambda\lambda'$.

Toutes les propriétés métriques s'appliquent, lorsque l'on n'a à considérer que le carré de la distance LL′ ou $\lambda\lambda'$. Exemple : Relation entre le rayon d'un cercle, le segment $\lambda\lambda'$ et la distance du centre à ce segment.

Si l'on considérait les cercles conjugués de ceux qui ont même axe radical, on obtiendrait des cercles passant par les points λ et λ'.

§ V. *Système de trois cercles.*

XXV. Étant donné un système de trois cercles, si l'on prend les axes radicaux de l'un des cercles avec chacun des deux autres, le point d'intersection de ces axes a même puissance par rapport aux trois cercles et par conséquent, il appartient à l'axe radical du second et du troisième cercle. On a donc ce théorème, que les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux se rencontrent en un même point. Ce point s'appelle le *centre radical* des trois cercles.

Lorsque les trois cercles ont leurs centres en ligne droite, les axes radicaux deviennent parallèles, et le centre radical s'éloigne indéfiniment.

XXVI. Cette notion du centre radical permet de construire immédiatement l'axe radical de deux cercles qui ne se rencontrent pas. On les coupe par un troisième cercle ; on mène les cordes communes ; leur point d'intersection appartient à l'axe radical cherché.

Il en résulte aussi que si l'on coupe par un cercle quelconque un système de cercles ayant même axe radical, toutes les cordes communes passent par un point fixe pris sur l'axe radical commun.

XXVII. **Du cercle orthogonal à trois cercles.** — On sait que l'axe radical de deux cercles est le lieu des centres des cercles qui coupent orthogonalement les deux cercles donnés. Donc le centre radical est le centre d'un cercle

qui coupe orthogonalement trois cercles donnés. Le carré du rayon de ce cercle que nous appellerons *cercle radical* est égal à la puissance commune du centre radical par rapport aux trois cercles. Si le centre radical est extérieur à l'un des trois cercles, il est extérieur aux deux autres, et le cercle radical est réel. Si le centre radical est intérieur à l'un des cercles, il est intérieur aux deux autres et le cercle radical est imaginaire.

(*A suivre.*)

PROBLÈME D'ANALYSE COMBINATOIRE

par M. **Kœhler**, répétiteur à l'École polytechnique.

NOMBRE DE MANIÈRES DE DÉCOMPOSER UN POLYGONE EN TRIANGLE PAR DES DIAGONALES.

Nous considérons deux cas :

1° Le nombre des côtés est pair et égal à $2n$.

Il est facile de voir qu'il y a alors $n - 1$ espèces de diagonales, celles qui joignent les sommets de deux en deux et divisent le polygone en un triangle et un polygone de $2n - 1$ côtés, celles qui joignent les sommets de trois en trois et divisent le polygone en un quadrilatère et un polygone de $2n - 2$ côtés, etc..., enfin celles qui divisent le polygone en deux autres de $n + 1$ côté. Chacune des diagonales de la première espèce fait partie de $P_3 . P_{2n-1}$ décompositions, en désignant par P_{2n-1} le nombre de décompositions d'un polygone de $2n - 1$ côtés; P_3 est égal à l'unité. Chacune des diagonales de la deuxième espèce fait partie de $P_4 . P_{2n-2}$ décompositions et ainsi de suite jusqu'à $P_{n+1} . P_{n+1}$. Il y a $2n$ diagonales de chacune des $n - 2$ premières espèces, et n seulement de la dernière. Si l'on fait la somme $2n (P_3 . P_{2n-1} + P_4 . P_{2n-2} + ..$

$+ n \cdot P^2_{n+1}$, on aura évidemment toutes les décompositions possibles, mais chacune d'elles est comptée $2n - 3$ fois, car dans chaque décomposition entrent $2n - 3$ diagonales. Ainsi on aura la formule

$$(2n - 3) P_{2n} = 2n [P_3 P_{2n-1} + P_4 P_{2n-2} + \dots + P_{n+2}] + n P^2_{n+1} \qquad (1)$$

2° Le nombre des côtés est impair et égal à $2n + 1$.

Il y a alors $2n - 2$ diagonales, issues de chaque sommet et par suite $n - 1$ espèces différentes, comme tout à l'heure; il y a d'ailleurs $2n + 1$ diagonales de chaque espèce, et dans toute décomposition entrent $2n - 2$ diagonales. On arrivera par conséquent à la formule

$$(2n - 2) P_{2n+1} = (2n + 1) [P_3 P_{2n} + P_4 P_{2-1} + \dots + P_{n+1} P_{n+2}] \qquad (1\ bis)$$

Les formules (1) et (1 *bis*) ne suffisent pas pour résoudre la question. Nous allons examiner encore de combien de décompositions fait partie chacun des triangles qui ont pour base un même côté du polygone, et en déduire une nouvelle relation entre les nombres P_3, P_4 etc... Prenons pour type un polygone de sept côtés ABCDEFG (1). Le côté AB sert de base à cinq triangles ; ABC peut faire partie de P_6 décompositions, savoir toutes celles de l'hexagone ACDEFG; ABD détache du polygone total un pentagone ADEFG et un triangle BCD; il fera donc partie de $P_5 \cdot P_3$ décompositions. ABE détache les deux quadrilatères AEFG et BCDE, ce qui donne $P_4 \cdot P_4$ décompositon dont ce triangle peut faire partie. On trouve ensuite pour ABF un pentagone et un triangle, enfin pour ABG un hexagone. En ajoutant tous les nombres ainsi obtenus, on aura évidemment le nombre total des décompositions du polygone de sept côtés, c'est-à-dire

$$P_7 = P_6 + P_5 P_3 + P_4 P_4 + P_3 P_5 + P_6 .$$

La généralisation est évidente et conduit à ces deux formules

$$P_{2n} = 2P_{2n-1} + 2P_3 P_{2n-2} + \dots + 2P_n \cdot P_{n+1} \qquad (2)$$

$$P_{2n+1} = 2P_{2n} + 2P_3 P_{2n-1} + 2P_4 P_{2n-2} + \dots + P^2_{n+1} \qquad (2\ bis)$$

Cela posé, la formule (1 *bis*) appliquée à un polygone de $2n - 1$ côtés donne

$$\frac{2n - 4}{2n - 1} P_{2n-1} = P_3 P_{2n-2} + P_4 P_{2n-3} + \dots + P_n P_{n+1}$$

ou, en tenant compte de

$$(2) \qquad \frac{2n - 4}{2n - 1} P_{2n-1} = P_{2n} - 2P_{2n-1}$$

ce qui peut s'écrire

$$P_{2n} = P_{2n-1} \frac{8n - 10}{2n - 1}. \qquad (3)$$

De même la formule (1) comparée à (2 *bis*) donne

$$P_{2n+1} = 2P_{2n} + \frac{(2n - 3)}{n} P_{2n}$$

ou

$$P_{2n+1} = P_{2n} \cdot \frac{4n - 3}{n} \qquad (3\ bis)$$

Si maintenant dans la relation (3) on fait $2n - 1 = N$, elle devient $P_{N+1} = P_N \cdot \frac{4N - 6}{N}$. La relation (3 *bis*) prend la même forme, en posant $2n = N$. Donc enfin, quel que soit le nombre des côtés, pair ou impair, on peut écrire la suite d'égalités :

$$P_N = \frac{4N - 10}{N - 1} P_{N-1}$$

$$P_{N-1} = \frac{4N - 14}{N - 2} P_{N-2} \dots P_5 = \frac{10}{4} P_4$$

$$P_4 = \frac{6}{3} \quad P_3 = \frac{6}{3}$$

et on trouve en les multipliant membre à membre

$$P_N = \frac{6 \cdot 10 \cdot 14 \dots\dots (4N - 10)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots\dots (N - 1)}.$$

Telle est la formule que je me proposais d'établir.

* Le lecteur est prié de faire la figure.

ETUDE

SUR

LES LIGNES D'ÉGALE TEINTE ET LE LAVIS A TEINTES PLATES

Par M. **Cotillon.**

(*Suite.* Voir page 296).

Loi du produit des cosinus.

C'est en procédant ainsi que Monge et ses élèves ont fait faire à la question un pas très-important et sont arrivés à la loi remarquable du produit des cosinus sur laquelle nous appuyons toutes nos recherches.

Les règles qui en résultent furent appliquées au lavis d'une sphère qui fut mise sous les yeux de Monge : l'émotion du célèbre professeur fut significative; le résultat présentait un relief remarquable, quelque imparfaits que fussent les moyens employés pour appliquer pratiquement la loi théorique.

La démonstration de cette loi se trouve dans le premier cahier du *Journal de l'École polytechnique,* germinal an III (mars-avril 1795), avec cette annotation :

« Le problème qui fait l'objet de ce mémoire a été résolu en commun par plusieurs élèves chefs de brigade, dans le mois de pluviôse dernier; le citoyen Dupuis, l'un de ces élèves, s'est chargé de la rédaction. »

La loi dont il s'agit peut s'énoncer comme il suit ;

« On suppose une surface d'un poli mat, telle qu'un moulage en plâtre, par exemple; elle est éclairée par des rayons parallèles entre eux, et l'observateur est assez éloigné pour que les rayons visuels puissent être également considérés comme parallèles.

» Dans ces conditions, l'éclairage apparent d'un point de la surface ne dépend que des angles que forment avec la normale à cette surface le rayon visuel et le rayon lumineux,

et il est proportionnel au produit des cosinus de ces deux angles. »

Ainsi donc, si l'on désigne par :

K l'éclat apparent d'un point de la surface considérée;

l l'angle que fait le rayon lumineux avec la normale en ce point;

v l'angle que fait le rayon visuel avec la même normale;

A une constante dépendant de la nature de la surface et de l'intensité de la lumière incidente,

On aura : $K = A. \cos l \times \cos v.$

Cette formule rend bien compte des phénomènes que l'on observe dans la nature.

Ainsi, la valeur de l'éclat apparent devient nulle pour $\cos l = 0^{\circ}$ ou $l = 90^{\circ}$, c'est-à-dire pour tous les points où le rayon lumineux est perpendiculaire à la normale (tangent à la surface), points qui, en effet, ne reçoivent pas de lumière; le lieu géométrique de ces points n'est autre chose que la ligne d'ombre naturelle.

L'éclat devient également nul pour $\cos v = 0^{\circ}$, ou $v = 90$; c'est le contour apparent et, l'on sait, en effet, qu'une surface ne renvoie pas de lumière, suivant la direction de son plan tangent.

Enfin, on déduit de cette formule, par des considérations géométriques fort simples, que K est maximum au point où le rayon lumineux et le rayon visuel sont dans le même plan que la normale, et où ces deux rayons font des angles égaux avec cette normale; c'est le *point brillant*, déterminé par les règles de la réflexion spéculaire.

Lignes d'égale teinte.

Entre le point brillant et la ligne d'intensité nulle, on trouve des points dont l'intensité lumineuse va en décroissant; tous ceux de ces points qui possèdent la même intensité lumineuse apparente forment une *ligne* dite *d'égale teinte*. La considération de ces lignes est importante et il est facile de les tracer.

Attribuons à K une valeur constante K_1, puis faisons

varier l entre 0° et 90°; pour chaque valeur de l, nous aurons :

$$\text{Cos } v = \frac{K_1}{A.\cos l}$$

Ce qui permettra de calculer v et, par suite, de tracer par points la courbe d'égale teinte correspondant à K_1. En donnant ensuite à K d'autres valeurs K_2, K_3, etc., on tracera de la même manière d'autres courbes d'égale teinte, en aussi grand nombre que l'on voudra.

Le problème du modelé, dans les conditions posées par Dupuis, est donc résolu.

Malheureusement, il y a loin de là aux applications pratiques, et les conditions idéales admises par Dupuis sont assez éloignées de celles qu'on rencontre dans la nature. Si l'on peut admettre, sans erreur sensible, que les rayons lumineux envoyés par le soleil sont parallèles, il n'est pas permis de négliger les reflets produits par ces mêmes rayons, non plus que l'illumination générale de l'atmosphère qui baigne de lumière même les ombres les plus vives.

Énoncé des données admises.

Nous avons cherché dans nos études à nous rapprocher davantage de la nature, sans nous écarter de la simplicité d'énoncé indispensable pour faciliter les constructions ; voici les conditions admises dans nos épures :

« Le corps à représenter est supposé terminé par une *surface mate*, c'est-à-dire possédant la propriété de diffuser une portion très-notable de la lumière reçue.

» Puis, nous avons considéré trois types bien tranchés, relativement à la texture de la surface.

» Dans le premier, type poli, mais type idéal (les moyens mécaniques que nous possédons ne nous permettant pas d'en approcher sans substituer le brillant au mat), la loi du produit des cosinus reçoit son application rigoureuse.

» Dans le deuxième type, type rugueux, nous avons supposé la surface revêtue d'aspérités disposées régulièrement et assimilables à un ensemble de stries à plans inclinés de 13° 41′ sur la surface générale.

» Enfin, dans le troisième type, type très-rugueux, l'inclinaison des stries a été portée à 27° 22', maximum rarement atteint dans les surfaces usuelles.

» Cela fait, nous avons pris la valeur de ces angles 13°41' et 27° 22' pour expressions de rugosité, en remarquant que leur admission, comme éléments de calcul dans le problème qui nous occupe, apporte à l'application de la loi du produit des cosinus un trouble profond. »

Cette modification à la formule de Dupuis est, d'ailleurs, justifiée par les expériences suivantes.

Expériences photométriques.

Nous avons reconnu, en introduisant dans l'intérieur d'une chambre noire une lame susceptible de se mouvoir autour d'un axe perpendiculaire au plan des rayons lumineux et des rayons visuels (rayons dont le passage a été ménagé à l'aide de tubes cylindriques convenablement placés), que non-seulement le maximum de lumière réfléchie variait avec le degré de rugosité de la lame soumise à l'expérience, mais encore que l'inclinaison sur la bissectrice de l'angle formé par lesdits rayons, inclinaison nécessaire pour obtenir ce maximum, variait aussi et dans des limites assez étendues. C'est ainsi que nous avons pu constater, à l'égard du papier, par exemple, un écart de 12 à 15° entre l'expression de la rugosité du papier satiné et celle du papier verré.

Les autres substances donnaient des maximums différents, mais la valeur de l'angle de rotation à effectuer pour les obtenir se trouvait être toujours en raison du degré de rugosité de la surface.

Ces expériences, répétées sur des surfaces rugueuses artificielles produites par des sillons tracés dans deux directions rectangulaires, par un burin à section isoscèle, nous ont donné des résultats identiques aux précédents.

Déplacement du point brillant.

Nous avons été ainsi amené à reconnaître à l'élément des rugosités une influence perturbatrice considérable dont

l'effet principal est d'éloigner le point brillant de la position qu'il occupe dans l'hypothèse d'un poli parfait, pour le rapprocher du point le plus éclairé avec lequel il se confond dans le cas d'une surface très-rugueuse.

Cette influence va en décroissant, du point brillant à la ligne d'ombre naturelle, où elle devient nulle.

Telle a été l'origine de nos études actuelles sur le lavis.

(A suivre.)

NOTE SUR LE PARTAGE DES POLYGONES

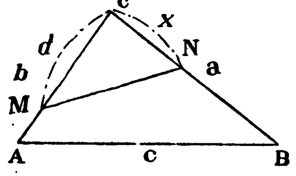
CAS OU LA LIGNE DE PARTAGE PASSE PAR UN POINT DONNÉ SUR LEUR PÉRIMÈTRE,

par **Maurice d'Ocagne.**

La géométrie pratique fournit une solution de cette question. Mais, cette solution, excellente pour les opérations, sur le terrain ne peut pas être appliquée aux constructions graphiques.

Nous nous proposons de développer dans cette note une méthode qui permet de résoudre graphiquement la question.

I. **Problème fondamental.** — *Par un point donné* M *sur le périmètre d'un triangle, mener une droite qui divise la surface de ce triangle en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.



J'appelle N le point où la droite cherchée doit rencontrer le côté BC.

Je pose $CN = x \quad MC = d.$

J'ai $$\frac{S.MCN}{S.ACB} = \frac{m}{m+n}.$$

Mais
$$\frac{S.MCN}{S.ACB} = \frac{dx}{ab}.$$

Donc
$$\frac{dx}{ab} = \frac{m}{m+n};$$

d'où
$$x = \frac{ab\,m}{d\,(m+n)}.$$

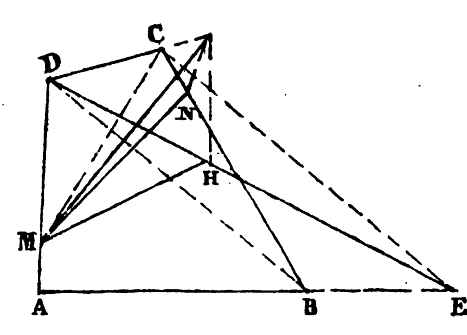
Je puis construire facilement $\frac{ab}{d}$, quatrième proportionnelle à trois quantités données. Soit l la ligne ainsi obtenue,

$$x = \frac{lm}{m+n}.$$

x est une quatrième proportionnelle à $m+n$, m et l. Je puis donc construire cette ligne, et j'ai ainsi le point cherché N.

II. — *Par un point donné* M *sur le périmètre d'un quadrilatère quelconque, mener une droite qui divise la surface de ce quadrilatère en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$.

Je convertis le quadrilatère ABCD en un triangle équivalent, en menant par le sommet C une parallèle CE à la diagonale BD, que je prolonge jusqu'à sa rencontre E avec le côté AB. On sait que le triangle ADE équivaut au quadrilatère ABCD comme étant formés d'une partie commune ABD et des triangles équivalents BCD et BED.



En m'appuyant sur le problème précédent je mène par le point donné M la ligne MH, telle que

$$\frac{DMH}{DAE} = \frac{m}{m+n} \qquad (1)$$

Par le point H je mène à DM la parallèle HL qui rencontre DC prolongé en L*. Je trace ML

$$(2) \qquad MDL = DMH$$

(même base DM; même hauteur, puisque HL est parallèle à DM).

Je tire MC; par le point L, je mène à MC la parallèle LN qui rencontre BC en N. Je trace MN. Je dis que MN est la droite cherchée; en effet :

$$MDCN = MDC + MCN.$$

Mais MCN = MCL, car LN est parallèle à MC.

Donc $\qquad MDCN = MDC + MCL = MDL$

ou comme $\qquad MDL = DMH \qquad (2)$

$$MDCN = DMH$$

Remplaçant dans (1) DMH et DAE par leurs équivalents MDCN et ABCD, il vient

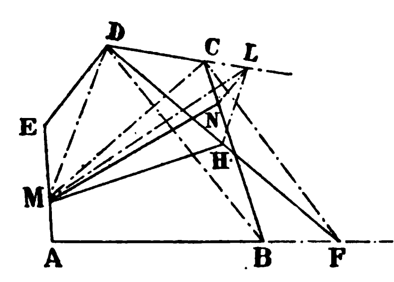
$$\frac{MDCN}{ABCD} = \frac{m}{m+n}$$

ce qui prouve bien que MN est la droite cherchée.

III. — Prenons maintenant un pentagone.

Par un point donné M snr le périmètre d'un pentagone quelconque, mener une droite qui divise la surface de ce pentagone en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

Je convertis le pentagone en un quadrilatère équivalent AEDF, par un procédé connu. Je mène MH qui divise le quadrilatère en parties proportionnelles à m et à n,



$$\frac{MEDH}{AEDF} = \frac{m}{m+n} \qquad (1)$$

Par le point H je mène à MD la parallèle HL qui rencontre en L (*) DC prolongé. Je joins ML.

(*) Cette parallèle peut rencontrer DC entre les points D et C; dans ce cas, la question est terminée là; on n'a plus qu'à joindre ML.

J'ai MDH = MDL (même base; même hauteur). J'ajoute de part et d'autre MDE.

$$MDE + MDH = MDE + MDL$$

ou

$$MEDH = MEDL$$

Je tire MC. Par le point L je mène la ligne LN parallèle à MC et qui rencontre BC en N. Je trace MN et je dis que c'est la droite cherchée.

En effet, MEDCN = MEDC + MCN

Mais MCN = MCL, puisque LN est paralèlle à MC

donc $$MEDCN = MEDC + MCL = MEDL$$

on comme $$MEDL = MEDH \qquad (2)$$

$$MEDCN = MEDH.$$

Remplaçant dans (1) MEDH et AEDF par leurs équivalents MEDCN et AEDCB, il vient

$$\frac{MEDCN}{AEDCB} = \frac{m}{m+n}$$

ce qui prouve bien que MN est la droite cherchée.

IV. — On voit par là que quel que soit le polygone, on peut de proche en proche ramener la question au cas du triangle.

On ne peut évidemment pas étendre la méthode à des polygones d'un trop grand nombre de côtés, car on arriverait à des constructions trop compliquées; mais on peut facilement l'appliquer pour les polygones les plus usuels, ceux de 3, 4, 5, 6 côtés. En faisant au crayon les constructions préparatoires pour les effacer ensuite, on a des figures qui ne sont pas trop chargées et qui par conséquent ne sont pas embrouillées.

L'avantage de cette méthode est donc de pouvoir résoudre les questions de ce genre uniquement à l'aide de la règle et du compas et, par suite de pouvoir les exécuter facilement sur le papier.

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le Dr **Henri Suter**, de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon.

(*Suite*, voir page 311.)

LA SCIENCE CHEZ LES GRECS

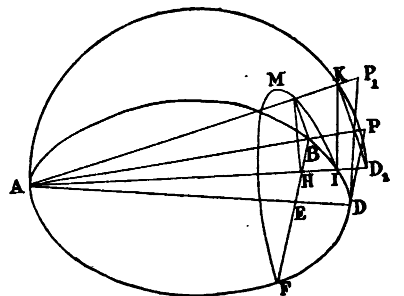
Son importation. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie.

Comme *Diogène Laerte* nous l'indique et comme nous le rapporte encore plus exactement *Eutocius*, *Archytas* a résolu le problème des deux moyennes proportionnelles ou de la duplication du cube d'une manière tout à fait inusitée jusqu'alors, à l'aide de sections cylindriques et du mouvement ou déplacement des figures (χαι πρῶτος κίνησιν ὀργανικὴν διαγράμματὶ γεωμετρικῷ προσηγαγε). La dernière assertion de *Diogène* pouvait donc être interprétée ainsi : *Archytas* aurait trouvé encore d'une autre manière, par un procédé purement géométrique, le cube, c'est-à-dire la duplication du cube. Du reste, nous ne savons rien sur un second mode de solution de ce genre; mais la solution du mathématicien pythagoricien, parvenue jusqu'à nous, jette un jour si favorable sur ses talents géométriques, que nous pouvons encore lui attribuer d'autres travaux importants dans cette direction.

Nous reproduisons, telle qu'*Eutocius* nous l'a conservée (Comm. in Arch. de Sph. et Cyl. lib. II) cette solution d'Archytas; elle est ingénieuse et intéressante à tous égards.

Soient données les deux droites dont nous voulons trouver les moyennes proportionnelles. Autour de la plus grande AD comme diamètre on décrit un cercle que, pour plus de netteté dans la figure, nous représentons raccourci elliptiquement. Alors, à partir de A, on porte dans le cercle la plus courte des droites données AB, et on la prolonge jusqu'au point d'intersection P avec la tangente en D. De B, on trace BF perpendiculaire sur le diamètre AD, et par suite paral-

lèle à PD. On élève alors perpendiculairement au demi-cercle ABD, un demi-cylindre; et de même au-dessus du diamètre AD, également perpendiculaire au plan du cercle ABDF, un demi-cercle dont le plan se trouve par conséquent dans le parallélogramme du demi-cylindre.



On fait alors tourner le demi-cercle sans changer de position perpendiculaire, autour du point A jusqu'à ce qu'il occupe la position AKD. Il coupe alors la surface du demi-cylindre en un point K qui, si l'on continue à faire tourner le demi-cercle, décrit une certaine courbe sur la surface cylindrique.

De même, que l'on fasse tourner le triangle rectangle APD autour du diamètre AD dans une direction opposée à celle du demi-cercle, son hypoténuse décrira une surface conique. Mais elle devra aussi rencontrer en un certain point, en K par exemple, la courbe que décrit le point K à la surface du demi-cylindre.

Si l'on abaisse du point K la perpendiculaire à la surface du cercle ABDF, elle rencontrera naturellement la circonférence du cercle en I, car K est situé à la surface du demi-cylindre perpendiculaire.

Construisons, en outre, un demi-cercle perpendiculaire à la surface du cercle ABDF, et au-dessus de BF comme diamètre; soit MH l'intersection de ce demi-cercle avec le demi-cercle AKD_1. MH est naturellement perpendiculaire au diamètre BF.

Que l'on trace ensuite KD_1 et MI; alors le rectangle formé avec BH et HF pour côtés, ou, ce qui revient au même, le rectangle formé avec AH et HI pour côtés, est équivalent au carré construit sur MH. Par conséquent, le triangle AMI est semblable aux triangles AMH et MHI, et l'angle AMI est droit. Mais l'angle AKD_1 est aussi droit; donc MI est

parallèle à KD_1; et par suite, à cause de la similitude des triangles ; $D_1A : AK = AK : AI = AI : AM$; mais $D_1A = AD$ et $AM = AB$ sont les deux droites données; donc AK et AI sont les deux moyennes proportionnelles cherchées.

Cette solution d'*Archytas* comparée aux solutions qui ont été effectuées plus tard à l'aide des sections coniques, nous laisse apercevoir assez nettement la marche du développement de ces problèmes. Chez *Archytas*, la stéréométrie apparaît déjà au premier plan; les sections cylindriques, ainsi que la pénétration du cône et du cylindre sont employées pour la solution, tandis que *Menæchme* a le premier introduit les sections du cône dans la science géométrique. — D'ailleurs, on doit admirer l'ingéniosité déployée dans cette solution par *Archytas*, vu les faibles ressources dont il disposait.

Un élève d'*Archytas*, contemporain de Platon, était le mathématicien *Eudoxe* de *Cnide*, qui florissait en l'an 380 avant J.-C. Il ne reste plus aucun de ses nombreux écrits sur la géométrie et l'astronomie; mais les écrivains et mathématiciens grecs nous ont transmis beaucoup d'indications isolées le concernant. Son principal mérite consiste dans les découvertes stéréométriques qu'*Archimède* lui attribue dans son livre *de Sphaer. et Cyl.* — Le théorème établissant que la pyramide est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur, le théorème analogue relatif au cône et au cylindre, auraient été découverts par *Eudoxe*. Il se serait aussi occupé, c'est *Eutocius* qui le rapporte, du problème de la duplication du cube et il en aurait trouvé la solution au moyen de lignes courbes. Quelles étaient ces courbes? *Eutocius* ne nous l'apprend pas. Il n'entendait point par là des sections coniques; nous pouvons le conclure d'un passage d'*Eratosthène* où il est dit qu'*Archytas*, de Tarente, avait résolu le problème au moyen du cylindre; *Eudoxe*, à l'aide de lignes courbes; et les élèves de l'Académie, au moyen des sections coniques.

Eudoxe a aussi développé la théorie des proportions et des corps réguliers; nous ne savons rien de plus précis à cet égard. Nous reviendrons plus loin sur les idées que ce mathématicien professait en astronomie.

A la découverte des sections coniques se rattache intimement l'origine de la théorie des *lieux géométriques* qui appartient aussi aux premiers platoniciens. L'application des sections coniques à la solution des problèmes si souvent cités exigeait la connaissance des propriétés de ces sections considérées comme lieux géométriques. C'est en effet ce que nous constatons déjà dans les solutions de *Menœchme* : cette propriété de la parabole « le carré des ordonnées est égal au produit de l'abcisse par le paramètre », s'applique à tous les points de la parabole et la caractérise comme lieu géométrique.

Cependant les sections coniques n'étaient pas considérées à ce point de vue, chez les anciens, et même l'ellipse n'est jamais définie comme le lieu de tous les points dont les distances à deux points donnés forment une somme constante. — Au contraire, les lieux géométriques jouaient un grand rôle dans la planimétrie et dans la stéréométrie. Proclus nous cite un certain *Hermotime* de *Colophon* qui se serait occupé d'eux et leur aurait consacré un ouvrage. *Pappus*, de son côté, cite *Aristée*, le dernier mathématicien important avant la fondation de l'Ecole d'Alexandrie, comme l'auteur d'un traité sur les lieux géométriques. *Aristée*, fut aussi le premier qui écrivit les « Eléments des sections coniques ». D'après le témoignage de *Pappus*, *Euclide* aurait pris ces Éléments pour base de son œuvre.

Avec *Aristée* nous fermons la série des mathématiciens qui précèdent *Euclide*; et avec lui nous fermons la période du développement proprement dit de la géométrie grecque. C'est maintenant, c'est avec la fondation de l'École d'Alexandrie que commence, sur la base des recherches faites jusqu'à ce jour, l'édification systématique des sciences mathématiques par *Euclide*, *Archimède* et *Apollonius*. Mais avant d'arriver à cette période florissante de l'histoire des mathématiques, il nous reste à jeter un coup d'œil sur les progrès de l'astronomie et de la philosophie naturelle depuis *Platon* jusqu'à *Euclide*.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878

Solution par M. **L. de Launay** (*1er prix*).

Déterminer les rayons des deux bases d'un tronc de cône, connaissant : 1° la hauteur h *du tronc ; 2° le volume, qui est équivalent aux* $\frac{3}{4}$ *de la sphère de diamètre* h ; *3° la surface latérale équivalente à celle du cercle de rayon* a.

On ne considérera que les troncs formés par des plans qui coupent les arêtes d'un même côté du sommet, et on indiquera le nombre des solutions qui correspondent aux diverses valeurs du rapport $\frac{a}{h}$.

Soient x et y les deux rayons de bases, l'expression du volume sera $\frac{\pi h}{3}(x^2 + y^2 + xy)$, et, comme par hypothèse, elle est égale aux $\frac{3}{4}$ du volume d'une sphère de diamètre h, c'est-à-dire à $\frac{3}{4} \times \frac{1}{6}\pi h^3$ ou $\frac{1}{8}\pi h^3$, on a la première équation du problème :

$$\frac{\pi h}{3}(x^2 + y^2 + xy) = \frac{1}{8}\pi h^3$$

ou, en supprimant le facteur commun πh et multipliant par 3 les deux membres de l'équation :

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{8}h^2$$

La surface latérale a pour expression (l désignant l'apothème du tronc) $\pi l(x + y)$ ou $\pi\sqrt{h^2 + (x - y)^2}\,(x + y)$; on a donc, après avoir élevé au carré, la seconde équation du problème :

$$(2) \qquad (x + y)^2 (h^2 + (x - y)^2) = a^4.$$

Pour résoudre le système des équations (1) et (2), on peut employer plusieurs méthodes :

1re méthode. — Prenons pour inconnues auxiliaires la somme des rayons et leur différence ; en remarquant que l'on a identiquement :

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

la première équation devient

$$(x + y)^2 - \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{4} = \frac{3}{8} h^2.$$

ou, toutes réductions faites :

$$(3) \qquad 6(x + y)^2 + 2(x - y)^2 = 3h^2$$

d'où, en substituant dans cette équation la valeur de $(x + y)^2$ tirée de l'équation (2) :

$$\frac{6\,a^4}{h^2 + (x - y)^2} + 2(x - y)^2 = 3h^2$$

ou

$$6a^4 + 2h^2\,(x - y)^2 + 2(x - y)^4 = 3h^4 + 3h^2(x - y)^2$$

d'où l'on déduit l'équation définitive

$$(4) \qquad 2(x - y)^4 - h^2(x - y)^2 + 6a^4 - 3h^4 = 0.$$

Nous sommes ramenés à résoudre une équation bi-carrée en $x - y$, d'où l'on tire

$$x - y = \pm \sqrt{\frac{h^2 \pm \sqrt{h^4 - 8\,(6a^4 - 3h)^4}}{4}}.$$

$$x - y = \pm \frac{\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}}{2}.$$

Mais, les équations (1) et (2) étant symétriques par rapport à x et y, on peut convenir d'appeler toujours x la plus grande des deux quantités x et y ; $x - y$ est alors toujours positif et l'on a finalement

$$(5) \qquad x - y = \frac{\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}}{2}.$$

Portons maintenant ces valeurs de $x - y$ dans l'équation (3), il vient :

$$6(x+y)^2 = 3h^2 - \frac{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{2} = \frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{2}$$

d'où enfin

$$(6) \qquad x + y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}}$$

Maintenant ces valeurs de $x - y$ et de $x + y$ étant connues, on en déduit x et y par les équations

(7)
$$x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} + \frac{1}{4}\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}$$

(8)
$$y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} - \frac{1}{4}\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}$$

Discussion. — Pour que les valeurs de x et de y soient admissibles, il faut d'abord qu'elles soient réelles. — Pour que $(x - y)^2$ soit réel, il faut que la quantité $25h^4 - 48a^4$ soit positive, c'est-à-dire que l'on ait

(9)
$$\frac{a^4}{h^4} < \frac{25}{48} \qquad \frac{a}{h} < \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt[4]{3}}.$$

Mais une valeur de $(x - y)^2$ admissible doit être non-seulement réelle, mais encore positive pour que $x - y$ soit réel.

Or, le produit des racines de l'équation (4) est $\frac{6a^4 - 3h^4}{2}$; nous sommes donc conduits à distinguer 3 cas, suivant que $6a^4 - 3h^4$ sera supérieur, inférieur ou égal à zéro, c'est-à-dire suivant que $\frac{a^4}{h^4}$ sera supérieur, inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$; ces 3 hypothèses sont d'ailleurs possibles, puisque $\frac{1}{2}$ est plus petit que $\frac{25}{48}$; nous avons donc déjà pour $\frac{a^4}{h^4}$ deux valeurs principales $\frac{1}{2}$, $\frac{25}{48}$.

D'ailleurs l'équation (3) étant du premier degré par rapport à $(x + y)^2$, à chaque valeur de $x - y$ correspondra une valeur de $(x + y)^2$; pour que cette valeur soit admissible, il faut qu'elle soit positive, c'est-à-dire (voir équation 3) que $3h^2$ soit plus grand que $2(x - y)^2$; nous devons donc comparer $\frac{3}{2}h^2$ à $(x - y)^2$; or, en substituant $\frac{3}{2}h^2$ à $(x-y)^2$

dans l'équation (4), on obtient $\frac{9}{2}h^4 - \frac{3}{2}h^4 + 6a^4 - 3h^4$ ou $6a^4$.

Le résultat de la substitution est donc toujours positif et par suite la valeur de $(x+y)^2$ positive.

D'ailleurs pour que x et y soient positifs, il faut que $x - y$ soit plus petit que $x + y$.

Ou
$$6(x-y)^2 < 6(x+y)^2$$
$$6(x-y)^2 < 3h^2 - 2(x-y)^2$$
$$8(x-y)^2 < 3h^2$$
$$(x-y)^2 < \frac{3}{8}h^2.$$

Comparons donc $\frac{3}{8}h^2$ à $(x-y)^2$ et pour cela substituons $\frac{3}{8}h^2$ à $(x-y)^2$ dans l'équation (4); le résultat de la substitution est

$$\frac{9}{32}h^4 - \frac{3}{8}h^4 + 6a^4 - 3h^4 = \frac{9h^4 - 12h^4 - 96h^4 + 192a^4}{32}$$

ou enfin
$$\frac{192a^4 - 99h^4}{32}$$

Nous sommes donc conduits à distinguer 3 cas, suivant que $192a^4$ est supérieur, égal ou inférieur à $99h^4$, c'est-à-dire suivant que $\frac{a^4}{h^4}$ est supérieur, égal ou inférieur à $\frac{99}{192}$.

D'ailleurs $\frac{99}{192}$ est égal à $\frac{1}{2} + \frac{3}{192}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{64}$ quantité plus petite que $\frac{25}{48}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{48}$.

Cela posé (*), faisons croître $\frac{a^4}{h^4}$, en passant par les trois valeurs principales que nous avons trouvées et qui, rangées dans l'ordre croissant, sont : $\frac{1}{2}, \frac{99}{192}, \frac{25}{48}$.

Supposons d'abord $\frac{a^4}{h^4}$ plus petit que $\frac{1}{2}$; alors, dans

(*) Un tableau de la discussion permet de la suivre plus facilement.

l'équation (4) le produit des racines est négatif; l'une d'elles est négative et à rejeter, l'autre est positive.

Mais $\frac{a^4}{h^4}$ est aussi plus petit que $\frac{99}{192}$, et $192a^4 - 99h^4$ est plus petit que 0; le résultat de la substitution de $\frac{3}{8}h^2$ à $(x-y)^2$ est donc négatif; l'une des valeurs de $(x-y)^2$ est plus petite que $\frac{3}{8}h^2$ et l'autre plus grande; comme il y a une racine négative, c'est elle qui est plus petite; l'autre est plus grande et à rejeter, donc dans ce cas, 0 solution.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est égal à $\frac{1}{2}$, le produit des racines est égal à zéro, l'une des valeurs de $(x-y)^2$ est donc nulle; il y a dans ce cas une solution : un cylindre.

D'ailleurs, l'autre racine est plus grande que $\frac{3}{8}h^2$ et à rejeter.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{99}{192}$, le produit des racines est positif, et, comme leur somme l'est aussi, elles sont toutes deux positives; d'ailleurs, le résultat de la substitution de $\frac{3}{8}h^2$ étant toujours négatif, une seule de ces racines est admissible; on n'a donc pour $x-y$ et $x+y$ qu'une seule valeur et par suite un seul système de valeurs pour x et y.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est égal à $\frac{99}{192}$, le résultat de la substitution de $\frac{3}{8}h^2$ est nul; $\frac{3}{8}h^2$ est donc une des racines de l'équation en $(x-y)^2$; par suite pour cette racine $x-y$ est égal à $x+y$ et y est nul, c'est-à-dire qu'on a un cône; d'ailleurs l'autre solution est admissible.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est compris entre $\frac{99}{192}$ et $\frac{25}{48}$, le résultat de la substitution de $\frac{3}{8}h^2$ est positif; donc les deux racines

sont ou toutes deux plus petites que $\frac{3}{8}h^2$ ou toutes deux plus grandes ; leur somme étant égale à $\frac{h^2}{2}$, elles ne peuvent pas être toutes deux plus grandes ; donc elles sont toutes deux plus petites et par conséquent admissibles. Dans ce cas, il semble qu'il y ait quatre systèmes de solutions, mais on n'en a en réalité que deux.

I

$$x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 - \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} + \frac{1}{4}\sqrt{h^2 + \sqrt{25h^4 - 48a^4}}$$

$$y = \frac{1}{4}\sqrt{5h^2 - \sqrt{25h^4 - 48a^4}} - \frac{1}{4}\sqrt{h^2 + \sqrt{25h^4 - 48a^4}}$$

II

$$x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 + \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} + \frac{1}{4}\sqrt{h^2 - \sqrt{25h^4 - 48a^4}}$$

$$y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 + \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} - \frac{1}{4}\sqrt{h^2 - \sqrt{25h^4 - 48a^4}}$$

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est égal à $\frac{25}{48}$, on a une solution double pour $x - y$; et enfin quand $\frac{a^4}{h^4}$ est plus grand que $\frac{25}{48}$, on n'a pas de solution.

Ces divers résultats peuvent se résumer dans le tableau suivant :

Variation de $\frac{a^4}{h^4}$	*Nombre de solutions.*
$\frac{a^4}{h^4} < \frac{1}{2}$	0 sol.
$\frac{a^4}{h^4} = \frac{1}{2}$	1 sol. : cylindre.
$\frac{1}{2} < \frac{a^4}{h^4} < \frac{99}{192}$	1 sol.

$$\frac{a^4}{h^4} = \frac{99}{192}$$ 2 sol. : 1 cône et 1 tronc de cône.

$$\frac{99}{192} < \frac{a^4}{h^4} < \frac{25}{48}$$ 2 sol.

$$\frac{a^4}{h^4} > \frac{25}{48}$$ 0 sol.

On voit comme détail de la discussion que $\frac{a^4}{h^4}$ a un maximum $\frac{25}{48}$, on peut se proposer de le trouver directement.

Supposons h^4 constant, nous cherchons le maximum de a^4 ou, d'après l'équation (2), de

$$(x+y)^2\ (h^2 + (x-y)^2$$

ce que l'on peut écrire

10 $$[(x^2+y^2+xy)+xy]\,[h^2+(x^2+y^2+xy)-3xy]$$
$$= \left[\frac{3}{8}h^2+xy\right]\left[h^2+\frac{3}{8}h^2-3xy\right]$$

Ce dernier produit est lui-même égal à

$$\left(\frac{3}{8}h^2+xy\right)\left(\frac{11}{8}h^2-3xy\right)$$

ou, en développant,

$$\frac{33}{64}h^4 - \frac{9}{8}h^2xy + \frac{11}{8}h^2xy - 3x^2y^2.$$

Nous donc ramenés finalement à trouver le maximum de

$$2h^2xy - 24x^2y^2 = xy\ [h^2 - 12xy]$$

ou de $12xy\,(h^2 - 12xy)$, c'est-à-dire le maximum du produit de deux quantités dont la somme est constante ; ce maximum a lieu quand les facteurs sont égaux, c'est-à-dire quand xy est égal à $\frac{h^2}{24}$.

et alors a^4 est égal (voir équation 10) à

$$\left(\frac{3}{8}h^2+\frac{h^2}{24}\right)\left(h^2+\frac{3}{8}h^2-\frac{3h^2}{2}\right)$$

ou à $$\frac{10h^2}{24} \times \frac{30h^2}{24}$$

ou enfin à $\frac{25h^4}{48}$; ce que nous avions déjà trouvé par une autre méthode,

Autre solution :

Au lieu de prendre pour inconnues la somme et la différence des inconnues, on aurait pu prendre xy et $x + y$.

La seconde équation peut se mettre sous la forme

$$(x + y)^2 [h^2 + (x + y)^2 - 4xy] = a^4$$

d'où, en tenant compte de l'équation et de la relation

$$xy = \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{4}$$

$$(x + y)^2 \left[h^2 + (x + y)^2 - 4 (x + y^2) + \frac{3}{2} h^2\right] = a^4.$$

$$(x + y)^2 [2h^2 - 6 (x + y)^2 + 3h^2] = a^4.$$

$$6(x + y)^4 - 5h^2 (x + y)^2 + 2a^4 = 0.$$

$$x + y = \sqrt{\frac{5h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{12}}$$

$$xy = \frac{5h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{12} - \frac{3}{8} h^2$$

$$= \frac{h^2 + 2 \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{24}$$

x et y seront par conséquent les racines d'une équation du second degré.

$$X^2 - X \sqrt{\frac{5h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{12}} + \frac{h^2 + 2 \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{24} = 9.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 115.

Solution par MM. Reuss, de Belfort et Demortain, de Doullens.

On donne un trapèze ABCD *par les sommets duquel on mène quatre droites parallèles entre elles jusqu'à leur intersection avec les diagonales ou leur prolongement. En joignant consécutivement les points de rencontre, on obtient le quadrilatère* MNPQ.

1° *Démontrer que ce quadrilatère est un trapèze ;*

2° *Que sa surface est constante; en déterminer la valeur. On supposera connus l'angle* O *des diagonales et les droites* OA, OB, OC, OD *représentées respectivement par* a, b, c, d ;

3° *Que le rapport des bases de ce trapèze est invariable;*

4° *Déterminer à quelle position de* MQ *et à quelle valeur de l'angle* OBQ *répond le minimum de leur somme.*

Démontrer en outre que :

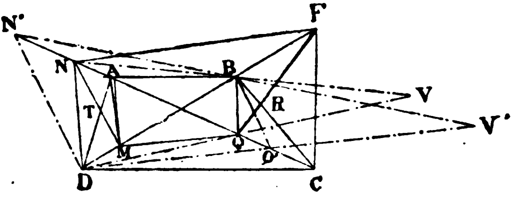
5° *Les points* (PQ, BC), (MN, AD) *et* O *sont en ligne droite;*

6° *De même les points* (AP, CM), (NB, DQ) *et* O;

7° *De même les points* (MB, MQ), (NQ, DC) *et* O;

8° *Trouver les lieux géométriques des points* (AP, CM) *et* (NB, DQ). (H. Lecocq.)

1° Soient CP, BQ, AM, DN les parallèles déterminant les sommets du quadrilatère MNPQ.



A cause des triangles semblables OBQ et OND, OAM et OPC, on a respectivement

$$\frac{OQ}{ON} = \frac{OB}{OD}, \quad \frac{OM}{OP} = \frac{OA}{OC}$$

mais les triangles AOB et DOC étant semblables

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$$

donc
$$\frac{OQ}{OM} = \frac{ON}{OP}.$$

Par suite les triangles OMQ et ONP ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables et $\widehat{OMP} = \widehat{OPN}$. Ces angles étant dans la position d'alternes-internes, les droites MQ et PN sont parallèles et la figure MNPQ est un trapèze.

2° Les droites NC et DP étant partagées par les quatre parallèles en segments proportionnels, on a

$$\frac{MP}{AC} = \frac{DB}{NQ}$$

d'où l'on tire $$MP \cdot NQ = AC \cdot DB \qquad (1)$$

O désignant l'angle aigu des diagonales, on a

$$\text{Surf. MNPQ} = \frac{1}{2}\ \text{MP . NQ sin O}$$

$$\text{Surf. ABCD} = \frac{1}{2}\ \text{AC . DB sin O}$$

et en vertu de l'égalité (1)

$$\text{Surf. MNPQ} = \text{surf. ABCD} = \frac{1}{2}\ (a + c)\ (b + d)\ \text{sin O}.$$

3° De ce que les triangles MOQ et ONP, OBQ et OND sont semblables, on a

$$\frac{NP}{MQ} = \frac{OP}{OM} = \frac{OC}{OA} = \frac{c}{a}.$$

4° En vertu de 3°, on a

$$\frac{NP + MQ}{MQ} = \frac{a + c}{a}$$

relation qui montre que NP + MQ sera minimum en même temps que MQ. Or le triangle MOQ donne

$$\frac{MQ}{\sin O} = \frac{MO}{\sin OQM} = \frac{OQ}{\sin OMQ}$$

d'où l'on tire

$$\overline{MQ}^2 = \frac{MO\ .\ QO \sin^2 O}{\sin OQM\ .\ OMQ}$$

Or, $\dfrac{OM}{a} = \dfrac{b}{QO}$

Donc, $MO\ .\ OQ = ab.$

Dès lors, $\overline{MQ}^2 = ab \sin^2 O \dfrac{1}{\sin OQM\ .\ \sin OMQ}$

MQ sera minimum quand le produit des sinus des angles OQM et OMQ sera maximum. Ce qui aura lieu quand ces angles seront égaux. Alors $OM = OQ = \sqrt{ab}$, de même $ON = OP = \sqrt{dc}$, $MQ = 2\sqrt{ab} \cos \dfrac{O}{2}$ et $NP = 2\sqrt{dc} \cos \dfrac{O}{2}$.

Le triangle OBQ donne

$$\frac{\sin (O + OBQ)}{\sin OBQ} = \frac{b}{OQ}.$$

Dans le cas du minimum $OQ = \sqrt{ab}$

dès lors
$$\frac{\sin(O + OBQ)}{\sin OBQ} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

par suite
$$\text{tg}OBQ = \frac{\sin O\sqrt{ab}}{b - \sqrt{ab}\ \cos O}.$$

On sait que dans un trapèze les milieux des deux bases, le point de concours des diagonales et le point de concours des deux côtés non parallèles sont quatre points en ligne droite.

La droite qui joint les milieux des bases AM, BQ du trapèze ABMQ passe donc en O. Or, relativement au trapèze ANMD, la droite qui passe par O et le milieu de AM passe par (AD, MN) et le milieu de MD. On verrait de même qu'elle passe par (BC, PQ) et le milieu de PC.

Le point O, les points (BC, PQ), (AD, NM) et les milieux des droites PC, BQ; AM, ND étant des points en ligne droite, 6° et 7° se démontrent comme 5°.

8° Soit V le point de rencontre des droites NB, DQ. Construisons un second trapèze selon les conditions imposées, et, pour plus de simplicité, ne marquons que les points nécessaires à la démonstration N' et Q'. Soit V' le point de rencontre des droites N'B, DQ'.

A cause des parallèles BQ, ND
$$\frac{VQ}{VD} = \frac{BQ}{ND}$$

de même
$$\frac{V'Q'}{V'D} = \frac{BQ'}{N'D};$$

mais les triangles BQQ', NDN', dont les côtés sont parallèles deux à deux, sont semblables et
$$\frac{BQ}{ND} = \frac{BQ'}{N'D}$$

donc
$$\frac{VQ}{VD} = \frac{V'Q'}{V'D}$$

Ce qui montre que VV' et QQ' sont parallèles. Or, V' est

un point quelconque du lieu, donc le lieu demandé est une parallèle à la diagonale AC du trapèze.

De même le lieu des points (PA, CM) est une parallèle à l'autre diagonale BD.

BIBLIOGRAPHIE

COURS ÉLÉMENTAIRE DE MÉCANIQUE, *à l'usage des élèves de l'Enseignement secondaire spécial et des élèves des Écoles Industrielles, par MM.* MONDIET *et* THABOURIN. — *Tome II, Mécanismes. — Tome III, Moteurs. — Paris, librairie Hachette.*

La seconde partie de cet ouvrage, dont nous avons déjà parlé dans le Journal, nous a plus vivement intéressé encore que la première. Les auteurs ont donné, dans un ouvrage de faible volume, un grand nombre de renseignements fort intéressants à bien des points de vue, à une époque où l'on se préoccupe tant, et avec raison, de perfectionner le travail mécanique. — De plus, par les problèmes du second volume, ils engagent les élèves à bien se rendre compte du mouvement d'une machine, en proposant comme exercices l'étude de mécanismes bien connus et surtout bien usuels. — Dans le troisième volume nous trouvons des exercices relatifs aux proportions à donner aux machines, et au rendement des divers agents moteurs employés dans l'industrie. — C'est par des applications numériques que l'on fait bien saisir aux élèves l'intérêt des théories que l'on a développées au cours et surtout lorsque l'on a soin de choisir, dans les exercices que l'on propose aux élèves, des nombres réels, et non pas des chiffres pris au hasard.

En résumé, nous dirons que MM. Mondiet et Thabourin ont rendu service à l'enseignement pratique en publiant leur ouvrage, et nous n'avons qu'un vœu à exprimer, c'est que, dans une seconde édition, ils veuillent bien franchir un peu les limites du programme officiel, surtout dans la partie dont nous nous occupons aujourd'hui, et donner plus de détails sur la mécanique appliquée.

A. M.

EXERCICES ET PROBLÈMES D'ALGÈBRE, *recueil gradué par MM.* MORF *et* TZAUT, *maîtres à l'École industrielle cantonale, à Lausanne. — Première série. — Exercices et réponses. — Paris, librairie Delagrave.*

Nous avons le plaisir de signaler un ouvrage fort utile aux maîtres et aux élèves studieux, c'est un recueil de problèmes et exercices d'algèbre, dû à deux maîtres de l'Ecole industrielle de Lausanne. — Les recueils de problèmes d'algèbre français ne manquent pas, il est vrai, mais ils ont un inconvénient : ils sont ou insuffisants ou trop complets. Insuffisants, lorsqu'ils ne contiennent que les énoncés, sans indication de solutions, et

trop complets lorsqu'ils renferment seulement des problèmes résolus. Suivant ici l'exemple que leur ont donné les ouvrages anglais dont ils déclarent eux-mêmes s'être inspirés, les auteurs ont eu soin d'indiquer seulement les énoncés et les résultats. Les professeurs peuvent donc vérifier facilement les résultats numériques, en même temps qu'ils corrigent le devoir au point de vue du raisonnement et les élèves sont obligés de travailler pour obtenir le résultat indiqué. — Une divergence entre leur résultat et celui qui est donné leur signale immédiatement une faute, et rappelle leur attention sur le travail qu'ils ont fait ; quelques exercices de cette nature suffisent pour habituer les élèves au calcul algébrique.

Signalons, dans l'ouvrage qui nous occupe, des indications historiques fréquentes et nous aurons montré les divers services que peut rendre ce petit volume; nous désirons que les auteurs fassent paraître prochainement la seconde série, qui doit, disent-ils, conduire au delà du second degré, et nous espérons aussi qu'ils donneront la troisième série qu'ils promettent, et qui complétera un bon recueil de problèmes et exercices d'algèbre.

A. M.

QUESTIONS PROPOSÉES

(Toutes ces questions sont extraites de *The Educational Times*.)

131. — Si, dans un quadrilatère quelconque, on considère les quatre cercles tangents à un côté et au prolongement des deux côtés adjacents, les centres de ces cercles sont sur une même circonférence.

132. — Démontrer que le produit de cinq nombres entiers consécutifs ne peut pas être le carré d'un nombre entier.

133. — ABCD et AB'C'D' sont deux carrés tels que BAB', DAD' sont des lignes droites. B'C coupe AD en E, et C'D coupe AB' en F. Prouver que AE et AF sont des lignes égales.

134. — Construire un triangle semblable à un triangle donné, ayant un de ses sommets en un point donné, et les deux autres sur deux droites données.

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET C[ie],
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 17972-8.

THÉORIE DES AXES RADICAUX

Par **A. Morel**.

(*Suite*, voir pages 257, 289 et 321.)

§ VI. *De l'inversion des systèmes de cercles.*

XXVIII. On appelle *figure anallagmatique* une figure qui se transforme en elle-même par inversion. Nous appellerons *cercle de reproduction* le cercle d'inversion particulier qui rend la figure anallagmatique. Il y a lieu de rechercher dans quels cas la figure formée par un ou plusieurs cercles est anallagmatique.

1° Un cercle est une figure anallagmatique en prenant pour pôle un point quelconque et pour module d'inversion la puissance de ce point. Donc, si le pôle est extérieur, le cercle de reproduction est un cercle orthogonal au cercle donné; si le pôle est intérieur, le cercle de reproduction devient imaginaire.

2° La figure formée par un système de cercles ayant même axe radical, est anallagmatique en prenant pour cercle de reproduction un cercle orthogonal quelconque, et par conséquent le cercle de reproduction est un point quelconque de l'axe radical commun.

3° La figure formée par un système de trois cercles quelconques est anallagmatique en prenant pour pôle le centre radical, et pour module la puissance commune de ce point par rapport aux trois cercles. Le cercle de reproduction est donc le cercle radical.

XXIX. Dans les exemples précédents, nous avons supposé que chaque cercle se transforme en lui-même. Dans un système de deux cercles, chacun des cercles peut se transformer dans l'autre, et alors il faut prendre pour pôle d'inversion l'un des centres de similitude et pour cercle de reproduction l'un des cercles bissecteurs.

XXX. *De l'inversion d'un système de cercles ayant même axe radical pour un pôle quelconque.* — Lorsque tous les cercles passent par deux points réels, il est clair que tous les cercles réciproques passent par deux points réels qui, sont les réciproques des premiers. — Lorsque les cercles n'ont aucun point commun, la figure inverse est encore un système de cercles ayant même axe radical, comme nous allons le démontrer.

En effet, si l'on considère le système conjugué de cercles orthogonaux aux cercles donnés, tous les cercles de ce nouveau système passant par deux points fixes réels. Dans l'inversion, ce second système se transforme en un troisième passant par deux points fixes réels, et d'après le principe de la conservation des angles, un cercle quelconque du premier système se transformera en un cercle orthogonal à ce troisième système. Donc, les cercles du premier système se transformeront en un système de cercles orthogonaux aux cercles du troisième système. Il ont donc même axe radical.

XXXI. Dans l'inversion de deux cercles, il y a lieu de rechercher d'autres transformations en figures plus simples.

Si les cercles se coupent en deux points réels, on les transforme en deux droites en prenant pour pôle l'un des points réels communs. On voit ainsi, par exemple, que le problème de mener un cercle tangent à trois cercles, dont deux se coupent, revient à mener un cercle tangent à une circonférence et à deux droites. — D'ailleurs, le problème général du cercle tangent à trois cercles quelconques peut toujours se ramener au cas précédent, puisque le centre du cercle cherché ne change pas si l'on augmente les trois rayons d'une même quantité.

XXXII. On peut encore transformer la figure formée par deux cercles qui ne se coupent pas, ou plus généralement la figure formée par un système de cercles ayant même axe radical, mais n'ayant aucun point commun, en une figure formée de cercles concentriques.

En effet, si l'on prend pour pôle l'un des points limites L du système, tous les cercles du système conjugué passent

par le pôle et par le second point limite L′. Donc, la figure donnée a pour inverse une série de circonférences coupant orthogonalement un faisceau de droites concourantes au point l', conjugué de L′. Donc cette figure est formée par un système de circonférences concentriques ayant pour centre l'.

XXXIII. Lorsqu'un cercle se transforme en un autre cercle, les centres des deux cercles réciproques ne sont pas des points correspondants. En effet, si par le centre O d'inversion, je mène des tangentes au premier cercle C, le second cercle C′ est tangent aux mêmes droites; par conséquent, le cercle décrit sur OC comme diamètre passe par le point de contact des tangentes communes. Mais ce cercle, passant par le pôle, se transforme en une droite perpendiculaire à OC, et passant par les points de contact des tangentes menées de O au cercle C′ Donc: *L'inverse du centre de l'un des cercles est le pied de la polaire du centre d'inversion par rapport à l'autre cercle.*

Si l'on considère le système formé par les deux cercles, on voit que le pied de la polaire se confond avec le point limite du système des deux cercles. Donc, *les inverses des centres de deux cercles réciproques sont les points limites du système des deux cercles.*

XXXIV. **Théorème.** — *Si un cercle mobile coupe sous deux angles fixes deux cercles d'un système ayant même axe radical, il coupe sous un angle fixe chacun des cercles du système, et en particulier il est constamment tangent à deux cercles du système.*

En effet, si l'on transforme le système en un système de cercles concentriques, et si l'on considère un cercle quelconque qui les coupe, ce cercle coupera encore sous les mêmes angles tous les cercles concentriques lorsqu'on le fera tourner autour du centre commun sans changer son rayon. En particulier, il sera tangent à deux cercles *fixes* de ce système de cercles concentriques.

Si les cercles passent par deux points fixes réels, on transforme le système en un faisceau de droites passant par un même point L ou L′. Si l'on considère un cercle quelconque et tous les cercles homothétiques par rapport au point L,

XXX. *De l'inversion d'un sy* droites du faisceau
radical pour un pôle quelcor seront tangents à
passent par deux points
cles réciproques passer ut se simplifie
réciproques des prer es en un s
cun point commur
de cercles ayant uel
démontrer. ét

En effet, s
orthogona est
veau sy quelconque du cerc
l'inver une droite; les deux autres cercles
pass une droite aux mêmes points sous des angles ég
d donc les rayons des cercles transformés sont égaux.

2. Lorsque les deux cercles ne se coupent pas, l'un des cercles bissecteurs est toujours réel. En désignant par r et r' les rayons des deux cercles, par p et p' les puissances du pôle par rapport à chacun d'eux, les rayons des cercles réciproques seront $\frac{\mu r}{p}$, $\frac{\mu r'}{p'}$, μ étant le module d'inversion. Pour que ces cercles soient égaux, il faut que l'on ait $\frac{p}{r} = \pm \frac{p'}{r'}$. Donc le lieu des pôles donnant lieu à une transformation en deux cercles égaux est le lieu des points dont les distances circulaires aux deux cercles donnés sont égales. C'est l'un ou l'autre des cercles bissecteurs.

Dans ce cas, en prenant pour pôle un point du cercle bissecteur qui est toujours réel, les deux cercles se transforment en deux cercles égaux, et le cercle bissecteur en leur axe radical, qui passe par le milieu de la ligne des centres.

XXXVI. **Corollaire I.** — *Tous les cercles tangents à deux cercles coupent à angle droit l'un des cercles bissecteurs.*

Corollaire II. — *Si deux cercles sont tangents entre eux et à deux autres cercles, le point de contact des premiers est sur le cercle bissecteur.*

Corollai
égaux deux
En effet
le cas de
XXXV
cercles
cercle
rcle
u

…mnée *commence par croître ou par décroître* *est positif ou négatif.*

…a $y = \frac{a}{a'}$. Soit K l'accroissement

— ∞ à une valeur négative aussi …u'on voudra. On aura :

$$\frac{a}{\cdot'} = \frac{(ba' - ab')x + (ca' - ac')}{a'(a'x^2 + b'x + c')}$$

…n valeur absolue, le signe de …ne $(ba' - ab')x$ ou bien de …ne que $ca' - ac'$.

… fonction ne peut avoir m.

…'x (1)

…ants :

…u trinôme (1)

…x racines … négatif, …st nul, …nie. … m

par ra… réciproques … droite avec le ce…

D'autre part, puis… eux-mêmes, il en est de … secteurs de ces cercles pris d… en eux-mêmes. Par conséquent ce… pent à angle droit le cercle radical.

Ainsi, en résumé : *La figure formée par leurs six cercles bissecteurs et leurs huit cercles … anallagmatique par rapport au centre radical.*

XXXVIII. **Théorème.** — *Les cercles bissecteurs de trois cercles pris deux à deux passent par les deux mêmes points.*

En effet, si l'on prend pour pôle l'un des points d'intersection de deux cercles bissecteurs, ces trois cercles se transforment en un système de trois cercles de rayons égaux. Donc le pôle appartient au troisième cercle bissecteur.

Ces deux points sont à égale distance circulaire des trois cercles.

Corollaire. — Ces trois cercles passant par deux mêmes points, ont leurs centres en ligne droite, et comme leurs centres sont les centres de similitude, on retrouve la propriété de l'axe de similitude.

La figure formée par trois cercles quelconques peut donc être transformée en la figure formée par trois cercles de rayons égaux. Dans ce cas, la construction du cercle tangent à trois cercles est immédiate. *(A suivre.)*

NOTE D'ALGÈBRE

par M. Fajon, professeur de l'Université.

Étude des variations de la fonction $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ *x croissant depuis* $-\infty$ *jusqu'à* $+\infty$.

Nous supposons que les deux trinômes $ax^2 + bx + c$, $a'x^2 + b'x + c'$ n'ont pas de racines communes.

1. *Continuité de la fonction.* — La fonction y est continue, lorsqu'elle n'est pas infinie.

On démontre dans quelques traités d'algèbre élémentaire que le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est une fonction continue. Il est facile d'en conclure la continuité de la fonction y, lorsque y n'est pas infini.

Soit $\frac{A}{B}$ la valeur déterminée que prend y, lorsqu'on donne à x une valeur réelle autre que les racines du dénominateur $a'x^2 + b'x + c'$, α, β, K les accroissements positifs ou négatifs de A, de B et d'y, lorsque cette valeur de x croît d'une quantité positive h aussi petite qu'on voudra. On a :

$$K = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{(B + \beta)B}$$

h étant infiniment petit, il en est de même de α et de β. Donc le numérateur $B\alpha - A\beta$ tend vers zéro, tandis que le dénominateur tend vers B^2. Donc K tend vers zéro.

Remarque. Si les racines du trinôme $a'x^2 + b'x + c'$ sont réelles et inégales, ce trinôme s'annule deux fois en changeant de signe, le numérateur conservant alors le sien. Donc y passe deux fois par l'infini en changeant de signe à chaque passage.

Si les racines du dénominateur sont réelles et égales, ce trinôme ne s'annule qu'une fois et conserve son signe. Donc y ne passe qu'une fois à l'infini et ne change pas de signe à ce passage.

2. *La fonction donnée commence par croître ou par décroître selon que* ab′ — ba′ *est positif ou négatif.*

Pour $x = \pm \infty$ on a $y = \frac{a}{a'}$. Soit K l'accroissement de y lorsque x croît de $-\infty$ à une valeur négative aussi grande numériquement qu'on voudra. On aura :

$$K = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} - \frac{a}{a'} = \frac{(ba' - ab')x + (ca' - ac')}{a'(a'x^2 + b'x + c')}$$

x étant suffisamment grand en valeur absolue, le signe de K est le même que celui du terme $(ba' - ab')x$ ou bien de $ab' - ba'$, puisque x est négatif.

Si $ab' - ba' = 0$, K a même signe que $ca' - ac'$.

3. *Maximum et minimum de* y. — *La fonction ne peut avoir plus d'un maximum ni plus d'un minimum.*

En discutant la condition de réalité d'x

$$Ay^2 + 2By + C \geqq 0 \qquad (1)$$

on trouve immédiatement les caractères suivants :

1° La fonction y a des limites si les racines du trinôme (1) sont réelles et inégales ($y' < y''$).

En particulier, la fonction est extérieure aux deux racines si A est positif, intérieure à ces racines si A est négatif, supérieure ou inférieure à la seule racine finie si A est nul, l'autre racine étant infinie dans ce dernier cas.

Or, la fonction y est continue lorsqu'elle n'est pas infinie. Donc y' et y'' sont respectivement maximum et minimum dans le premier cas, minimum et maximum dans le second; et dans le troisième cas y' est minimum ou maximum.

La fonction ne peut avoir d'autre maximum ni d'autre minimum. Car si une valeur de y autre que les racines du trinôme (1) était maximum ou minimum, la fonction passant deux fois par cette valeur, devrait passer quatre fois par une valeur voisine m. En d'autres termes, à cette valeur m de y répondraient quatre valeurs réelles de x, ce qui ne peut être.

2° La fonction varie sans limite si, A étant positif, les racines du trinôme sont égales ou imaginaires.

Il en est de même si $A = 0$, $B = 0$, $C > 0$. Mais le

numérateur et le dénominateur de la fonction y ont, dans ce cas, une racine commune $x = -\frac{b'}{2a'}$.

4. *Lois générales des variations de la fonction.*

Des principes précédents résultent immédiatement les lois qui régissent la marche de la fonction dans tous les cas, indépendamment des valeurs de la variable.

1° *La fonction n'a pas de limites. Caractères* $B^2 - AC \lesseqgtr o$, $A > o$. — La fonction y varie toujours dans le même sens, tant qu'elle n'est pas infinie, mais passe deux fois à l'infini en changeant de signe à chaque passage, puisque A est positif.

Si donc $ab' - ba' > o$, y croît depuis $\frac{a}{a'}$, jusqu'à $+\infty$, passe brusquement à $-\infty$ et croît depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, passe de nouveau brusquement à $-\infty$ et croît enfin jusqu'à $\frac{a}{a'}$.

Si $ab' - ba' < o$, les variations ont lieu dans l'ordre et le sens inverses.

2° *La fonction a des limites. Caractère général* $B^2 - AC > o$. — Les variations changent de sens à chaque limite. Si $A < o$, la fonction n'est jamais infinie. Si $A > o$, la fonction passe par l'infini avant et après l'une des limites en changeant de signe à chacun des deux passages. Si $A = o$, elle passe une seule fois à l'infini en conservant son signe et, par suite, en changeant de sens dans ses variations.

Soit, par exemple, $A > o$, $ab' - ba' > o$, $\frac{a}{a'} < y' < y''$. La fonction y croît depuis $\frac{a}{a'}$ jusqu'à son maximum y' et décroît ensuite jusqu'à $-\infty$, passe alors brusquement à $+\infty$ pour décroître jusqu'à son minimum y'', croît ensuite jusqu'à $+\infty$, passe brusquement à $-\infty$ et croît enfin jusqu'à $\frac{a}{a'}$.

Si on veut le tableau des variations correspondantes de la fonction et de la variable, il faut calculer les racines

réelles du trinôme $a'x^2 + b'x + c'$, ainsi que les valeurs de x correspondantes à y' et y'' au moyen de l'équation

$$x = \frac{b - b'y}{2\,(a'y - a)} \qquad (2).$$

Soit $x' < x''$ ces deux valeurs de la variable x, $\alpha < \beta$ les racines réelles du trinôme $a'x^2 + b'x + c'$. On aura ainsi :

$$x = -\infty \;\ldots\; x' \;.\;.\;.\; \alpha \;.\;.\;.\;.\; x'' \;.\;.\;.\; \beta \;.\;.\; +\infty$$

$$y = \frac{a}{a'} \;\ldots\; \underset{\text{(MAXIMUM)}}{y'} \;\ldots\; -\infty \mid +\infty \;\ldots\; \underset{\text{(MINIMUM)}}{y''} \;\ldots\; +\infty \mid -\infty \;\ldots\; \frac{a}{a'}$$

La courbe de la fonction a, dans ce cas, six branches infinies asymptotes deux à deux à une parallèle à l'axe des x, $y = \frac{a}{a'}$, et à deux parallèles à l'axe des y, $x = \alpha$, $x = \beta$. Elle est extérieure à deux tangentes parallèles à l'axe des x menées aux points où l'ordonnée est maximum ou minimum.

Il est très-facile de définir dans les autres cas la courbe de la fonction au moyen du tableau des variations de la fonction et de la variable.

Soit, par exemple, $A = 0$, $ab' - ba' > 0$, $\frac{a}{a'} > y'$, y' est minimum.

$$x = -\infty \;.\;.\;.\;.\; \alpha \;.\;.\;.\; x' \;.\;.\;.\; +\infty$$

$$y = \frac{a}{a'} \;.\;.\;.\; +\infty \mid +\infty \;.\;.\;.\; \underset{\text{(MINIMUM)}}{y'} \;.\;.\;.\;.\; \frac{a}{a'}$$

La courbe a quatre branches infinies asymptotes deux à deux à une parallèle à l'axe des x, $y = \frac{a}{a'}$, et à une parallèle à l'axe des y, $x = \alpha$. Elle est tout entière au-dessus de la tangente parallèle à l'axe des x au point de la courbe dont l'ordonnée est y'.

5. *Calcul direct des valeurs de la variable pour lesquelles la fonction est maximum ou minimum.*

Il peut être utile d'avoir l'équation qui détermine directement x' et x'' sans connaître y' et y''. On obtient évidemment cette équation en éliminant y entre l'équation (2) et l'équation proposée, ce qui donne :

$$(ab' - ba')\,x^2 + 2\,(ac' - ca')\,x + (bc' - cb') = 0 \quad (3)$$

équation dont la loi de formation est très-simple. Ses racines x' et x'' étant calculées, on aura y' et y'' valeurs composantes de y au moyen de l'équation

$$y = \frac{2ax + b}{2a'x + b'} \qquad (4)$$

qui se déduit de l'équation (2).

Soit $x' < x''$. y', valeur de y correspondante à x', sera maximum ou minimum suivant que $ab' - ba'$ est positif ou négatif.

Si $ab' - ba' = 0$, l'équation (3) a pour racines

$$x = \frac{cb' - bc'}{2(ac' - ca')}, \quad x = \pm \infty.$$

les valeurs correspondantes de y sont $y' = \frac{c}{c'}$, $y'' = \frac{a}{a'}$, et l'on reconnaît que $\frac{c}{c'}$ est maximum ou minimum selon que $ca' - ac'$ est positif ou négatif. C'est le cas de la fonction

$$y = \frac{ax^2 + c}{a'x^2 + c'}.$$

La courbe de cettte fonction a deux branches infinies asymptotes à la droite $y = \frac{a}{a'}$ et une tangente parallèle à l'axe des x au point dont l'ordonnée est $\frac{c}{c'}$.

Enfin si l'on remarque que lorsque la fonction y est constante, x est indéterminé dans l'équation (3), on conclut, pour les différents cas que présente la fonction, les caractères suivants :

1° La fonction a des limites si les racines de l'équation (3) sont réelles et inégales ;

2° Elle varie sans limites si les racines sont égales ou imaginaires ;

3° Elle est constante si x est indéterminé.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

SUR UNE NOUVELLE MANIÈRE DE MENER LA TANGENTE A L'ELLIPSE PAR UN POINT PRIS SUR CETTE COURBE,

Par **Maurice d'Ocagne**, élève au Collége Chaptal.

I. La propriété énoncée dans la question n° 114 du journal nous a amené à trouver une nouvelle manière de construire la tangente à l'ellipse, en un point pris sur cette courbe.

Dans la méthode ordinaire, comme dans celle qui se déduit de la question n° 106*, on a besoin, pour résoudre le problème, de connaître les foyers de l'ellipse. Dans la méthode que nous allons exposer, nous ne nous servirons que du grand axe et même, dans la seconde partie de la note, nous faisons voir comment on peut très-facilement appliquer cette nouvelle construction de la tangente à la détermination des foyers.

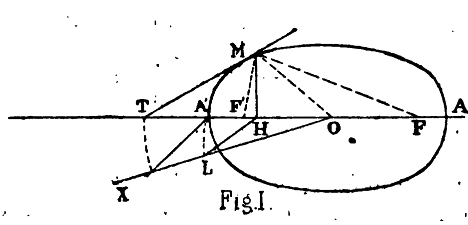


Fig.I.

Considérons en un point M de l'ellipse, la tangente MT, l'ordonnée MH, et la ligne MO qui joint le point M au centre O (*fig. 1*).

Dans le triangle FMF'**, MT est bissectrice extérieure, MH hauteur, MO médiane; nous avons donc d'après le problème n° 114.

$$\frac{MF + MF'}{2} = \sqrt{OH \cdot OT}$$

ou

$$a = \sqrt{OH \cdot OT}$$

par suite $a^2 = OH.OT$ et $OT = \frac{a^2}{OH}$.

* Voir le numéro 8. — Août 1878.

** Nous nous servons des foyers uniquement dans la démonstration.

On tire de là la construction suivante : après avoir mené l'ordonnée MH du point M, on porte sur une ligne quelconque OX passant par O, et à partir de ce point, une longueur OL égale à *a* ; on joint LH, et par le point A' on mène la parallèle A'P à LH; on a ainsi OP, qui est la troisième proportionnelle cherchée; on rabat cette ligne sur le grand axe, ce qui donne le point T; on n'a plus alors qu'à joindre MT.

Remarque. — Si M est assez près du sommet correspondant au petit axe pour que la ligne OT soit trop grande et qu'elle sorte des limites du dessin, on construit la moitié de cette droite, $\frac{OT}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{OH}$, on rabat la ligne ainsi obtenue sur AA'; on a alors le point T' qu'on joint au milieu I de MH; on n'a plus qu'à mener par M une parallèle à T'I.

II. Cette nouvelle construction de la tangente à l'ellipse nous permettra à son tour de résoudre une autre question, non moins intéressante, et que voici : *Étant donnés le grand axe d'une ellipse et un point quelconque de cette ellipse, en dehors du grand axe, construire géométriquement cette courbe* (*fig. 2*).

La question revient à la détermination géométrique des deux foyers.

Soient le grand axe AA' et le point M dont la distance au centre O est moindre que *a*. Il nous faut construire le triangle FMF'. Or, déterminons par la méthode ci-dessus exposée la tangente MT, et menons au point M la perpendiculaire MN à cette droite. MN est la normale à la courbe au point M et, par suite, la bissectrice intérieure issue du sommet M.

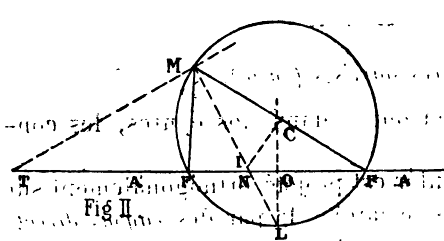


Fig II

Cela fait, cherchons à construire la circonférence circonscrite au triangle FMF'; le point O étant le milieu de la base

cherchée, le centre de cette circonférence est sur la perpendiculaire élevée en O à AA'.

De plus, prolongeons cette perpendiculaire et la droite MN jusqu'à leur rencontre en L; ces deux droites qui sont, l'une la perpendiculaire à la base en son milieu, l'autre la bissectrice de l'angle opposé, doivent se rencontrer sur la circonférence circonscrite, au milieu de l'arc que soustend FF'.

Le point L appartenant à la circonférence cherchée, la droite ML en est une corde. J'aurai donc un second lieu du centre en élevant à la droite ML une perpendiculaire en son milieu. L'intersection des deux lieux me donne le point C. De ce point comme centre, avec CM pour rayon, je décris la circonférence cherchée qui coupe AA' aux points F et F', foyers de l'ellipse. Connaissant le grand axe et les foyers, il m'est alors facile de construire la courbe.

ÉTUDE
SUR
LES LIGNES D'ÉGALE TEINTE ET LE LAVIS A TEINTES PLATES

Par M. **Cotillon.**

(*Suite*. Voir page 296.)

Données admises (suite).

Nous avons admis, en outre, dans nos épures, les conditions suivantes :

« Le corps à représenter est projeté orthogonalement sur un plan vertical; il est éclairé : 1° par des *rayons directs* parallèles dirigés de haut en bas et de gauche à droite, suivant la diagonale d'un cube s'appuyant par deux de ses faces sur les plans de projection ; 2° par des *rayons de reflet*, parallèles et directement opposés aux rayons directs et d'une intensité moindre ; 3° par la *lumière diffuse* supposée d'intensité uniforme dans tout l'espace environnant. »

Dans le type poli, les effets des rayons directs se calculeront et se dessineront par la règle du produit des cosinus, ainsi que nous l'avons vu plus haut.

Les rayons de reflet produiront dans l'ombre du corps des effets analogues à ceux des rayons directs, mais renversés; ils détermineront un point plus éclairé que les autres parties de l'ombre et analogue au point brillant; autour de ce point brillant s'étendront des courbes d'égale teinte jusqu'à la limite de l'ombre. On remarquera qu'aucun point de la surface n'est éclairé à la fois par la lumière directe et par la lumière reflétée; cette remarque simplifie les constructions et permet d'étudier, indépendamment les unes des autres, les parties éclairées directement et celles éclairées par reflet; la limite est évidemment la ligne d'ombre.

Quant à la lumière diffuse, l'expérience prouve qu'une surface éclairée par une lumière uniforme dans toutes les directions prend une intensité lumineuse uniforme, et que son modelé disparaît complétement.

C'est ce que l'on observe quelquefois à la campagne par un ciel gris et chargé de nuages; les objets perdent alors leur relief, et s'ils étaient éclairés en dessous autant que par le ciel, leurs formes deviendraient indiscernables.

La lumière diffuse aura donc pour effet de jeter sur l'ensemble de la surface à représenter un éclairage uniforme qui viendra se superposer à celui des rayons directs et des rayons de reflets; il est évident que les courbes d'égale teinte, tant dans la lumière que dans l'ombre, ne seront pas altérées dans leur forme; mais les intensités apparentes de toutes ces courbes seront augmentées d'une même quantité; le point brillant sera plus éclairé; les lignes d'ombre et de contour seront grises au lieu d'être noires.

Choix d'un étalon du modelé.

Il nous a paru convenable, pour la simplicité de l'exécution de nos épures, d'adopter un étalon du modelé. Nous avons choisi la sphère, et nous nous sommes proposé de

tracer sur la projection de sa surface les lignes douées d'un égal éclat apparent, lignes dites d'égale teinte.

Dans le type poli ou type abstrait, le problème est des plus faciles à résoudre, et il comporte deux solutions principales.

Nous ne décrirons que celle de ces solutions qui sera applicable aux types rugueux et très-rugueux.

Cette solution repose sur le tracé d'hyperboles formant la seconde des projections orthogonales des courbes d'égale teinte.

L'on détermine ces dernières à l'aide de la méthode bien connue des relèvements.

Dans l'épure, on a dû faire subir aux projections de la sphère étalon une rotation capable de rendre horizontal le rayon lumineux sans que, pour cela, le rayon visuel cessât d'être perpendiculaire au plan vertical.

Le point brillant B se trouve, conformément à la théorie de la réflexion spéculaire, sur la bissectrice de l'angle formé par les rayons de la sphère respectivement parallèles aux rayons lumineux et aux rayons visuels.

Les hyperboles, projections horizontales des courbes d'égale teinte de la partie éclairée, ont pour asymptotes communes les droites O, V, représentant, l'une, la limite de la partie éclairée, l'autre, la limite de la partie visible.

Pour la régularité de l'épure initiale et de celles qui en dériveront, nous avons réparti ces courbes d'une manière uniforme.

La partie éclairée par reflet est représentée par les hyperboles XII R et XI R, dont la position se lie aux positions précédentes par la loi du rapport entre les valeurs de lumière reflétée et de lumière directe, rapport que nous avons fixé arbitrairement à 0,78.

Comme chacun sait tracer l'hyperbole dont l'un des points et les asymptotes sont connus, nous ne donnerons pas cette construction.

Avant d'aborder les épures relatives aux surfaces rugueuses, nous devons définir le mode de génération de celles qui ont servi de base à nos calculs.

Si on admettait que la surface de la sphère fût revêtue de stries, d'inclinaison constante et connue, dont la direction se confondît avec celle de cercles méridiens ayant pour équateur un plan parallèle aux rayons lumineux et aux rayons visuels, ne serait-il pas évident que le point brillant du type poli aurait subi un déplacement égal à l'inclinaison des faces des stries sur la surface générale?

Et si, au contraire, on supposait les stries dirigées suivant des plans parallèles au plan équatorial précité, un résultat singulier ne se produirait-il pas? N'obtiendrait-on pas deux points brillants situés de part et d'autre de l'équateur?

Cela étant admis, ne peut-on pas conclure que, dans le cas où ces deux directions de stries coexisteraient sur la sphère considérée, le point brillant résultant de cette disposition occuperait un espace intermédiaire entre les positions précédentes, autrement dit, il serait unique, mais élargi, et il se rapprocherait du point assigné à la réflexion spéculaire sans cependant l'atteindre?

En émoussant légèrement, au tiers de la hauteur, par exemple, les sommets des pyramides ainsi obtenues, en comblant, de la même manière, les angles rentrants, nous nous éloignerions moins encore du caractère propre aux rugosités naturelles. Le point brillant coïnciderait alors avec celui que nos épures vont déterminer.

Les expériences décrites plus haut ont eu pour but de rechercher, parmi quelques surfaces rugueuses usuelles, l'expression de la rugosité, c'est-à-dire l'angle d'inclinaison sur la surface générale qu'il faudrait donner à des stries appartenant à la série des méridiens, pour que l'angle de rotation capable de faire surgir le point brillant fût d'une valeur égale dans les deux hypothèses, naturelle et fictive.

Cet exposé étant fait, nous ajouterons que, dans l'épure des lignes d'égale teinte de la sphère étalon, type rugueux ou type moyen, adopté dans le lavis de colonne torse exposé, le point brillant B' a subi un déplacement de 13° 41′ égal précisément à l'expression de rugosité de la surface considérée. L'asymptote O', ainsi qu'on l'a vu plus haut, ne subit aucun déplacement.

Quant à l'asymptote V′ et à sa correspondante V′R, elles ont glissé aussi de 13° 41′.

Les points de division à établir sur la circonférence formant projection horizontale de la sphère obéissent, dans leur déplacement, à une loi très-simple des progressions arithmétiques, loi qu'il est superflu de rappeler ici.

L'on connaîtra donc deux des points de chacune des hyperboles ; mais comme ces points seront inégalement distants des asymptotes fondamentales, il conviendra de faire glisser celles-ci d'une quantité convenable pour ramener ces distances à l'égalité sans changer l'angle d'ouverture des asymptotes.

Dans l'épure de la sphère étalon, type très-rugueux ou type extrême, le déplacement du point brillant B″ a été de 27° 22′ égal à l'expression de rugosité.

Des opérations analogues aux précédentes ont permis d'effectuer la construction des lignes d'égale teinte.

Nous avons obtenu, en procédant ainsi, trois étalons permettant le tracé rapide des courbes d'égale teinte et l'application rationnelle du lavis sur une surface géométrique quelconque.

A cet effet, nous remarquerons que l'éclairage apparent des surfaces est le même dans les points où les normales sont parallèles.

Par conséquent :

« Pour trouver l'éclairage apparent en un point d'une surface donnée, il suffit de mener à cette surface la normale au point considéré et un rayon de la sphère étalon, parallèle à cette normale ; l'éclairage apparent de la sphère étalon, à l'extrémité de ce rayon, sera le même que celui de la surface, au point considéré. »

En déterminant et numérotant par ce procédé l'éclairage apparent en différents points de la surface proposée, il devient facile de tracer les courbes d'égale teinte et d'achever le modelé.

On s'aidera, du reste, des remarques suivantes, évidentes d'elles-mêmes :

« L'éclairage apparent (abstraction faite des ombres portées

et des effets de perspective aérienne, négligeables lorsque l'étendue du corps à représenter est limitée aux dimensions ordinaires) est uniforme dans toute l'étendue d'un plan.

» Les génératrices rectilignes d'un cône, d'un cylindre, et, en général, d'une surface développable, sont des lignes d'égale teinte. »

Le cône et le cylindre, une fois construits, peuvent, à leur tour, servir d'étalons dans beaucoup de cas.

Lorsque la surface donnée est telle qu'on puisse y inscrire une série de sphères, la construction des courbes d'égale teinte est fort commode; on trace la ligne de contact de la sphère étalon, réduite par une proportion aux dimensions convenables, et, sur cette ligne, on pointe le passage des courbes d'égale teinte; cette opération, répétée suffisamment, donnera autant de points que l'on voudra de chacune des courbes d'égale teinte. Cette méthode est applicable aux surfaces de révolution, aux surfaces enveloppes, etc.

Lorsque les sphères inscrites sont toutes de même rayon (tore, poulie, anneau, serpentin, etc.), cette méthode devient très-rapide, si l'on se sert d'un papier transparent qu'on promène sur la sphère étalon; l'épure se fait en quelques instants.

Il est important de remarquer que les courbes d'égale teinte ne sont continues que lorsque les surfaces sur lesquelles elles s'appliquent sont elles-mêmes continues dans le sens mathématique du mot, et il ne suffit pas, pour cela, que ces surfaces se composent de parties se raccordant tangentiellement; il faut encore que la loi de variation des rayons de courbure successifs soit la même de part et d'autre de la ligne de raccordement. Ainsi, une demi-sphère raccordée à un cylindre circulaire de même diamètre ne constitue pas une surface géométriquement continue; aussi le long de cette ligne, les courbes d'égale teinte sont brisées.

Pour terminer le lavis, il s'agit maintenant d'appliquer les teintes d'encre de Chine. Il se présente ici une sérieuse difficulté pratique: l'intensité de la teinte n'est pas rigoureusement proportionnelle à la quantité, en poids, d'encre

de Chine sèche étendue par unité de surface. Le résultat obtenu avec une même teinte varie, non-seulement avec la manière de l'étendre, mais encore, et dans une large mesure, avec la qualité du papier, et avec un même papier, suivant qu'on lave sur une face ou sur l'autre. La même quantité d'encre de Chine ne donnera pas le même résultat suivant que vous l'appliquerez en une fois ou par teintes superposées.

Mais, ce qui est plus grave, la mesure de l'impression éprouvée par la rétine est loin, comme on sait, d'être en relation définie avec l'intensité de la teinte observée. Comme, en outre, la gamme comprise entre le blanc relatif du papier et le noir relatif aussi de l'encre, n'a pas, à beaucoup près, l'étendue de celle que nous offre la nature, l'altération des rapports entre les teintes n'est pas identique de part et d'autre.

En outre, l'état de rugosité de la surface ayant pour effet de soustraire partiellement le fond des anfractuosités à l'action additive des rayons lumineux diffusés par l'atmosphère, la gamme des teintes d'une surface rugueuse devra en subir l'influence et perdre son éclat.

Ces résultats d'expérience, d'une coordination difficile, nous ont longtemps dérouté. Pour arriver à donner à nos teintes les intensités indiquées par le calcul, nous avons dû recourir à des méthodes exactes, mais longues à appliquer, qu'il serait hors de propos de décrire ici ; ce travail pénible de tâtonnements étant fait une fois pour toutes, il conviendra de le prendre comme point de départ et de se servir des teintes de notre sphère étalon comme d'une gamme, pour leur identifier, par comparaison, les teintes des lavis qu'on aura à exécuter, ce qui peut se faire avec rapidité et exactitude.

Nos sphères étalons présentent douze teintes dans la lumière ; ce nombre est généralement très-suffisant, même pour de grandes surfaces ; pour des surfaces étroites, il serait trop grand, et il conviendra de le réduire à 6, 4 ou même 3 ; un peu d'habileté permettra de passer facilement d'un cas à l'autre.

On a quelquefois à étudier les effets produits par des rayons non parallèles ou émanant de plusieurs foyers lumineux; la solution, théoriquement facile au moyen des considérations qui précèdent, entraîne, en application, à des tracés fort compliqués; ces conditions, du reste, se présentent rarement, si ce n'est dans les reflets, où il faut souvent avoir égard à des rayons lumineux arrivant dans diverses directions; mais les reflets n'agissant guère que dans les parties obscures, là où les variations de teintes se font le moins sentir, le sentiment de l'artiste, guidé par les règles qui précèdent, suffira généralement pour arriver à l'effet voulu. Il en sera de même pour les contrastes sur un fond obscur ou vivement éclairé, et pour l'affaiblissement des rayons lumineux dû à l'interposition de l'atmosphère.

Dans le lavis de machines, on a souvent affaire à des surfaces présentant un degré de poli intermédiaire entre le poli mat et le poli brillant; toutes les pièces métalliques rabotées, limées, tournées, sont dans ce cas. Il est facile de tenir compte de cette circonstance.

Le rayon lumineux, arrivant sur un point d'une surface de cette nature, se divise en deux parties; une partie est diffusée comme sur une surface mate, l'autre partie est réfléchie spéculairement; la première partie donnera les effets d'une surface mate éclairée par des rayons directs d'une intensité moindre que les rayons arrivant sur la surface proposée, la seconde partie échappera presque complétement à l'œil de l'observateur, si ce n'est au point brillant, où elle s'ajoutera avec la lumière diffusée. L'éclat apparent sera donc, au point brillant, d'une intensité plus vive, et partout ailleurs d'une intensité plus faible que dans le cas d'une surface mate. Pour rendre cet effet, il suffira donc :

« De traiter la surface comme une surface mate et de réduire, d'une même quantité, l'éclairage de toutes les parties, sauf le point brillant dont l'éclat devra être augmenté. »

Nous ne terminerons pas sans dire un mot des épreuves photographiques, auxquelles on a quelquefois attribué, à tort, selon nous, une exactitude complète comme modelé, pour en faire une objection contre les règles rationnelles du

lavis. Les lois de la réduction des sels d'argent par la lumière et celles de la transparence des négatifs qui en proviennent sont trop peu connues pour qu'on puisse affirmer, *à priori*, l'exactitude de la reproduction; en serait-il même ainsi, que le tirage sur papier de l'image positive peut modifier du tout au tout le résultat; de sorte que le modelé obtenu dépend avant tout de l'habileté du photographe et des réactifs qu'il emploie. Aussi les bons artistes empruntent-ils à la photographie ce qu'elle a d'exact, c'est-à-dire les silhouettes et les contours, et refusent-ils de se servir du modelé incorrect qu'elle fournit.

Enfin, nous rappellerons une fois de plus que les solutions que nous proposons ne s'appliquent qu'à un éclairage déterminé et aux trois natures de surfaces, soit polies (0° 00'), soit rugueuses (13° 41'), soit très-rugueuses (27° 22'); les résultats auxquels elles conduisent devront être modifiés plus ou moins quand les circonstances seront différentes; c'est alors qu'interviendront utilement le goût et le sentiment de l'artiste.

ÉCOLE NORMALE 1878.

On donne une conique et deux points fixes A et B sur cette conique. Sur AB comme corde on décrit une circonférence qui rencontre la conique en deux nouveaux points C et D; on joint AC, BD qui se coupent en M; AD, BC qui se coupent en N :

1° Trouver le lieu des points M et N;

2° Trouver le lieu des points de rencontre de MN avec le cercle variable AB;

3° Construire et discuter ce dernier lieu.

COMPOSITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1878.

PREMIER DEGRÉ.

Mathématiques (4 heures).

1. — Méthode de Newton fondée sur la considération des dérivées successives pour trouver une limite supérieure des racines positives d'une équation.

2. — Construire la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par les deux équations.

$$x = \frac{t}{1 - t^2} \qquad y = \frac{t(1 - 2t^2)}{1 - t^2}$$

SECOND DEGRÉ.

Mathématiques.

On donne une droite D dont l'équation, par rapport à deux axes rectangulaires Ox et Oy, est $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

On considère les différentes coniques qui, ayant pour axes Ox et Oy sont normales à la droite D. Chacune d'elles rencontre cette droite en deux points ; en ces points, on mène les tangentes à la conique. Trouver l'équation du lieu du point de rencontre de ces tangentes. Démontrer : que ce lieu est une parabole ; que la distance du foyer de cette parabole à son sommet est le quart de la distance du point O à la droite D.

On construira géométriquement l'axe et le sommet de la parabole.

Géométrie descriptive.

On donne un losange ABCD dont la diagonale AOC est égale à 20 centimètres, et la diagonale BOD à 12 centimètres. Le plan du losange est horizontal et situé à 3 centimètres au-dessus du plan horizontal de projection. Le côté AB est situé dans le plan vertical de projection. Le losange, en tournant autour de la diagonale AC, engendre un double cône. Le cercle circonscrit au triangle COD, en tournant autour de AB, engendre un tore. On demande de représenter le double cône, supposé plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps située au-dessous du plan horizontal de projection, ainsi que la partie comprise dans le tore. — On indiquera à l'encre rouge les constructions relatives à la recherche d'un point quelconque de la ligne commune au tore et à l'un des cônes, et de la tangente à cette ligne.

Calcul numérique.

Étant donnés, dans un triangle ABC, deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$a = 35960,18$$
$$b = 98712,97$$
$$C = 35^\circ\ 18'\ 57'',\ 17$$

trouver les deux angles A et B, le troisième côté c et la surface S.

CONCOURS GÉNÉRAUX

CONCOURS DE 1868

Classe de troisième.

Étant donnés un cercle et deux tangentes à ce cercle, mener à ce même cercle une troisième tangente, telle que la partie interceptée entre les deux premières tangentes soit égale à une longueur donnée.

Classe de seconde.

Étant donné un tronc de prisme oblique à base triangulaire, mener par l'une des arêtes latérales un plan qui divise le tronc de prisme en deux parties équivalentes.

Classe de rhétorique.

Étant donnée une sphère OA, déterminer une seconde sphère O'A tangente intérieurement à la première et telle que si on lui mène un plan tangent BC et que, suivant le cercle d'intersection de ce plan et de la sphère donnée, on circonscrive un cône à cette sphère, le volume compris entre la surface latérale du cône et celle de la zone BAC, soit m fois le volume de la sphère cherchée O'A.

Classe de philosophie.

On fait tourner un triangle équilatéral autour d'un de ses côtés et on observe que la surface engendrée vaut la surface totale d'un cylindre de $0^m,6$ de rayon et de $0^m,8$ de hauteur. On demande la longueur du côté de ce triangle.

Exposer la série des propositions qu'il faut établir pour arriver à la mesure de la surface d'une sphère.

Mathématiques élémentaires.

Étant donnés une circonférence de cercle et un diamètre AB de cette circonférence, on mène par le point A une corde AC que l'on prolonge d'une quantité CD égale à la n^{me} partie de AC. On tire CB et l'on joint le point D au centre. Ces deux lignes se coupent en M. Lieu des points M.

CONCOURS DE 1869

Classe de troisième.

Étant données deux circonférences concentriques, tracer un rectangle semblable à un rectangle donné, tel que deux de ses sommets soient sur une des circonférences et les deux autres sommets sur la seconde circonférence.

2. Fractions périodiques.

Classe de seconde.

1. Trouver deux nombres connaissant leur différence et la différence de leurs racines carrées.

2. Soit un tétraèdre quelconque SABC. On joint les milieux des arêtes SA, SB, AC, CB.

Démontrer que tous ces milieux sont dans un même plan et que ce plan divise le tétraèdre en deux parties équivalentes.

Classe de rhétorique.

Circonscrire à une sphère donnée un tronc de cône dont le volume soit à celui de la sphère dans un rapport donné.

Trouver le rapport de la surface totale du tronc à la surface de la sphère.

Classe de philosophie.

1. Une droite se meut en restant constamment parallèle à un plan donné P et en rencontrant deux droites D et D_1, situées d'une manière quelconque dans l'espace.

Vers quelle direction tend-elle à mesure qu'elle s'éloigne indéfiniment du plan P ?

2. Étant donnés deux parallélépipèdes rectangles placés dans l'espace comme on voudra, trouver le lieu des points tels que la somme des carrés des distances de chacun d'eux aux sommets du premier soit égale à la somme des carrés des distances du même point aux sommets du second parallélépipède.

ÉCOLE CENTRALE

CONCOURS DE 1878

2e Session.

Géométrie analytique.

I. On donne, dans un plan, une droite P et un point F pris en dehors et à une distance a de cette droite ; on demande d'écrire l'équation générale des hyperboles admettant le point F pour un de leurs foyers et la droite P pour une de leurs asymptotes.

II. Du centre de chacune de ces hyperboles, on mène à la droite P une perpendiculaire qu'on prolonge jusqu'à son intersection M avec la directrice correspondant au foyer F : on propose de trouver l'équation de la courbe, lieu des points M et d'indiquer la position de cette courbe.

III. On propose enfin de former l'équation du lieu des projections du foyer F sur la seconde asymptote de chacune des hyperboles.

Épure.

On donne, sur le plan horizontal de projection, deux cercles C, C_1, dont la corde commune ss_1 est perpendiculaire à la ligne de terre xy.

Ces cercles servent de bases à deux cônes dont les sommets respectifs se projettent aux points (s,s'), (s_1,s'_1).

On demande : 1° de représenter par ses projections le solide commun aux deux cônes donnés, en limitant ces deux cônes, supposés pleins et opaques, d'une part aux sommets, d'autre part au plan des bases ; 2° de représenter en pointillé, jusqu'aux bords du cadre, les projections de la ligne de rencontre des nappes inférieures des surfaces coniques supposées alors prolongées.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection, et la tangente en ce point.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.

Titre intérieur : Solide commun à deux cônes circulaires.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre.

Trigonométrie.

Étant donnés les trois côtés d'un triangle :

$$a = 11491^{m},32$$
$$b = 14364^{m},15$$
$$c = 8618^{m},49$$

Calculer les angles et la surface de ce triangle.

Physique et Chimie.

I. Un tube cylindrique en verre, d'une longueur de $1^m,27$, muni de deux robinets, est disposé verticalement.

Le robinet inférieur étant fermé, on introduit dans ce tube une colonne d'eau de $0^m,89$, et, au-dessus, une couche d'huile de $0^m,20$ de hauteur; la densité de l'huile est égale à 0,75. Le reste du tube est plein d'air sous la pression atmosphérique de $0^m,750$.

On ferme le robinet supérieur et on ouvre partiellement le robinet inférieur, de façon à laisser couler l'eau goutte à goutte, jusqu'à ce que l'équilibre s'établisse.

On demande de quelle hauteur s'abaissera le niveau de l'huile.

Densité du mercure : 13,6.

II. Préparation et propriétés *chimiques* de l'ammoniaque.

Formules relatives à l'action du chlore et du carbone sur le gaz ammoniac.

On calculera la densité *théorique* du gaz ammoniac.

Densité de l'azote $d = 0,972$
— $d_1 = 0,0692$

QUESTIONS A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE SAINT-CYR

(*Suite*, voir page 249, 279 et 305.)

— Étant donnée une circonférence et deux perpendiculaires aux extrémités d'un diamètre, on propose de mener une troisième tangente telle que le volume engendré par le trapèze ainsi formé tournant autour du diamètre soit équivalent à une sphère donnée.

— Calculer les arêtes d'un parallélipipède rectangle, connaissant sa surface, sa diagonale, et sachant que l'une des arêtes est la moyenne arithmétique (ou géométrique) des deux autres.

— Trouver la largeur d'une malle formée par un parallélipipède rectangle surmonté d'un demi-cylindre, connaissant la hauteur totale de cette malle, sa longueur et sa capacité.

— Que devient la fraction $\frac{\sin a - \sin b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$ quand on y fait $a = b$?

— Par un point C pris sur le prolongement d'un diamètre, mener une sécante telle que la partie intérieure ait une longueur donnée. On prendra pour inconnu l'angle en C.

— Étant donné un angle et un point sur l'un de ses côtés, de ce point on abaisse une perpendiculaire sur l'autre côté; du pied, une perpendiculaire sur le premier côté, et ainsi de suite. Limite de la somme de ces perpendiculaires.

— Deux cercles sécants ont pour rayons R et R'; la distance de leurs centres est *d*. Trouver l'aire de la partie commune aux deux cercles.

— Dans une sphère de 1 mètre de rayon, une calotte sphérique a pour

base un cercle dont la surface est le quart de celle de la zone. Calculer la hauteur de la zone et l'angle au centre.

— Un cône équilatéral est inscrit dans une sphère ; on coupe les deux corps par un plan parallèle à la base du cône. Trouver la variation de la surface de la couronne comprise entre les deux cercles de section.

— Résoudre $\cot x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x$.

— Résoudre $\cos x = 4 \cos(60° - x)$.

— Résoudre $3 \sin x = 4 \cos^3 \frac{x}{2}$.

— Limite de $\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ pour $x = 0$.

— Résoudre $\sin x \sin 3x = m$.

— Démontrer la relation

$$4S\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right) = (a + b + c)^2$$

— Étant donné un triangle rectangle, mener dans l'intérieur de l'angle droit une ligne, telle que la somme des projections des côtés sur cette ligne soit égale à une ligne donnée.

— Rendre calculable par logarithmes $1 - \operatorname{tg}^2 a$.

— Résoudre $\operatorname{tg} x\,(\operatorname{tg} 45° + x) = 2$.

— Résoudre $\frac{a}{x} = \frac{x - 1}{x - a}$.

— Construire un triangle connaissant b, c et sachant que $C = 3B$.

— Résoudre $\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = K$.

— Résoudre un triangle connaissant la hauteur et les angles à la base.

— Étant donnés une droite et deux points, trouver sur la droite un point tel, qu'en le joignant aux deux points donnés, les droites ainsi menées forment avec la droite deux angles α et β, tels que $\alpha = 2\beta$.

— Étant données deux circonférences de rayon R et R′ et la distance d de leurs centres, trouver sur la ligne des centres un point M, tel que si on le joint aux points A et A′, où une sécante perpendiculaire à OO′ rencontre les deux circonférences, le rapport des deux lignes soit constant, quelle que soit la sécante ($MO = x$, $OB = y$).

— Si deux nombres a et b sont premiers entre eux, si on forme les $b - 1$ premiers multiples de a et qu'on les divise par b, ils donnent des restes différents.

— Mener par un point pris sur la bissectrice d'un angle droit une droite, telle que la portion comprise dans l'angle droit ait une longueur donnée.

— Mener par un point pris dans l'intérieur d'un angle droit une sécante, telle que la surface soit donnée.

— Etant donnée une demi-circonférence, mener par l'extrémité du diamètre une corde, telle que le segment qu'elle détache engendre la moitié du volume de la sphère. (Prendre l'angle pour inconnu).

— Dans un triangle, on donne A, B, C ; calculer : 1° le rayon du cercle inscrit ; 2° la distance du sommet A au centre de ce cercle ; 3° le rayon d'une circonférence touchant ce cercle et les côtés de l'angle.

— Résoudre $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{b^2}$.

— Étant donnés deux points P, P′ sur un diamètre, l'un intérieur, l'autre extérieur, mener par le point P extérieur une sécante PCD, telle que surface P′CD $= m^2$.

—

(OP′ = a, OP′ = b, x et y distances du centre aux pieds des perpendiculaires abaissées des points inconnus sur le diamètre $\widehat{CPP'} = \alpha$).

— Mener par un point O pris sur la bissectrice d'un angle quelconque une droite, telle que la somme des segments détachés soit égale à une longueur donnée.

— Trouver la relation qui doit exister entre les côtés d'un triangle pour qu'il y ait un angle double de l'autre.

— Démontrer qu'un nombre impair non premier est la somme d'un nombre impair de nombres entiers consécutifs.

— Tout nombre pair non divisible par 4 ne peut pas être la différence de deux carrés. Tout nombre pair divisible par 4 est la différence de deux carrés.

— On propose de retrancher d'un carré un triangle isoscèle ayant pour base le côté a, de telle sorte que le centre de gravité de la figure restante soit au sommet du triangle.

— Un nombre est divisible par 37 lorsque, en le divisant en tranches de trois chiffres à partir de la droite, la somme des tranches est un multiple de 37.

— On donne une circonférence O; par le centre on mène un rayon horizontal sur le prolongement duquel on prend un point A; à une distance OA = a; on demande à quelle distance OM = x du centre il faut mener une perpendiculaire au rayon OA pour que, si l'on mène une sécante rencontrant en M et M′ la circonférence, la somme des inverses des perpendiculaires menées de M et M′ sur cette perpendiculaire soit constante quelle que soit la sécante.

(Prendre AM = x et y' y'' les deux distances.)

— Dans une circonférence, on donne un diamètre AB et un rayon OC perpendiculaire à ce diamètre, on joint le point C au milieu M de AO. De M comme centre avec MC comme rayon, on décrit l'arc CD occupant en D le diamètre AB. Démontrer que la corde CD est le côté du pentagone régulier inscrit dans la circonférence.

— Trouver sur la base d'un triangle que l'on suppose égale à b, un point tel que la somme des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés AB, BC soit égale à m, connaissant les hauteurs abaissées de A et de C sur les deux autres côtés.

— Un trapèze birectangle a pour hauteur h, la somme des trois autres côtés est constante. Trouver le maximum de la surface totale et le maximum du volume du tronc de cône engendré par ce trapèze tournant autour de sa hauteur.

— Trouver le maximum du volume du segment sphérique à deux bases de hauteur H dans une sphère de rayon R.

— Trouver le maximum du triangle formé dans une circonférence en joignant les extrémités de la corde au centre.

— La somme des surfaces latérales de deux cylindres ayant pour hauteur h et h' est égale à la surface d'une sphère dont le rayon est a. Trouver les valeurs du rayon des bases pour lesquelles la somme des volumes des cylindres est maximum.

— Trouver le minimum de la surface ou du volume d'un cône circonscrit à la sphère.

— On donne une demi-circonférence, trouver sur le diamètre un point C tel que si l'on mène CH perpendiculaire sur le diamètre, et que avec CH

comme rayon, on décrive un quart de cercle, la somme des surfaces engendrées par ce quart de cercle et l'arc AB soit donnée.

— On donne deux parallèles, leur distance commune en grandeur et en position et sur l'une d'elles une longueur $AC = d$; mener par le point C une sécante CDE telle que

$$\text{cône ADC} + \text{cône DBE} = m_3$$

— Deux circonférences concentriques étant données, inscrire un carré ayant deux sommets sur l'une et deux sommets sur l'autre.

— Etant donné un segment de cercle, trouver sur ce segment un point dont les distances aux deux extrémités de la corde soient dans le rapport de 1 à 2.

— Résoudre $\cos x + 3 \sin \frac{x}{2} = 9$

— On donne un triangle ABC; mener une ligne DE parallèle à BC de manière que $AD = EC$.

— Deux parallèles étant coupées par une droite à 45°, mener par un point pris sur l'une d'elles une autre sécante qui forme avec les droites données deux triangles dont la somme des surfaces soit donnée.

— Etant donnée une circonférence tangente en A à une droite donnée, déterminer la portion d'un diamètre BC de telle sorte que la surface totale engendrée par le trapèze BCB'C' tournant autour de la tangente soit dans un rapport donné avec la surface du cercle.

— Inscrire dans une circonférence un trapèze isoscèle, connaissant la surface et les côtés non parallèles.

— Etant donnés les trois côtés d'un triangle rectangle, trouver le rayon de la circonférence tangente à la hauteur à un segment de l'hypoténuse et au cercle circonscrit au triangle.

— Etant donné un demi-cercle, déterminer un point M tel que si l'on mène les cordes MA et MB la somme des volumes engendrés par les deux segments soit au volume du triangle dans un rapport donné.

— On donne une circonférence et une droite distante du centre d'une quantité a. Mener une corde DC parallèle à la droite, de telle sorte que $DC + DA = m$, DH étant la distance des deux parallèles.

— Trouver le minimum du volume engendré par un losange circonscrit à une circonférence de rayon r tournant autour de ses diagonales. Démontrer que le produit de ce volume par celui qu'engendre le rectangle dont les sommets sont aux points de contact du losange, est constant et en déduire le maximum du volume de ce rectangle.

— Une chaudière a la forme d'un cylindre terminé par un hémisphère de même rayon. On donne la somme a de la surface du cylindre et du rayon et l'on demande de calculer les dimensions du cylindre de manière que la capacité de la chaudière soit maxima.

— Trouver le maximum et le minimum de la distance de deux cordes parallèles dans une circonférence, leur différence étant constante et égale à d.

— Chercher le maximum ou le minimum de la surface latérale du cône circonscrit à une sphère donnée.

— Démontrer que la somme des carrés de $x^2 - y^2$ et $2xy$ est toujours un carré parfait.

— Résoudre l'équation $x^2 + a(b + c) = (a + x)(b + x) - \frac{a^2c}{b}$.

— Résoudre le système $bx + ay = 2ab$
$$ax + by = a^2 + b^2.$$

— On donne un point M dans un cercle; mener par ce point une sécante partagée par le point en deux parties qui soient dans un rapport donné.

— Minimum du volume du tronc de cône circonscrit à la sphère.

— Un cône droit étant inscrit dans une demi-sphère, on demande de mener un plan parallèle à la base, de telle sorte que les sections faites dans le cône droit et dans la sphère soient dans un rapport donné.

— Les données étant les mêmes que précédemment, mener le plan de manière que la somme des deux cercles de section soit égale à la surface de la calotte formée par le plan.

— On donne une circonférence de rayon R et un point A distant de a du centre. Trouver sur la circonférence un point B, tel que si l'on mène BC parallèle à OA, le rapport $\frac{AB}{BC}$ soit égal à une quantité donnée m.

— Étant donnée une circonférence et deux points extérieurs distants entre eux de d et distants du centre des quantités a et b. Trouver sur la circonférence un point M tel que la somme des carrés des distances aux deux points A et B soit égale à un carré donné. Discussion.

— On donne deux circonférences de rayons r et r'. Par le centre de l'une d'elles, on mène une sécante faisant avec la ligne des centres, un angle θ. Trouver sur cette sécante un point M, tel que le rapport des tangentes menées de M aux deux circonférences soit égal à un rapport donné.

— Maximum ou minimum du trapèze inscrit à une demi-circonférence donnée.

— Inscrire dans une circonférence donnée un trapèze dont on donne la hauteur et la surface.

— Résoudre les équations $\sin(x + a) + \sin(x - a) + 2m \cos^2 \frac{y}{2} = K$, $x + y = \frac{\pi}{2}$.

— On donne un cercle et un point A distant du centre de a. Mener par ce point une sécante BC, telle que sa longueur soit b. Trouver l'angle α qu'elle forme avec OA.

— Résoudre $\operatorname{tg} x = \cos x$.

— Trouver le maximum ou le minimum de
$$\operatorname{tg}(a + x) - \operatorname{tg} x.$$

— Résoudre l'équation
$$3\sin^2 x - 2\cos^2 x - \frac{5}{2}\sin 2x = 0.$$

— On donne deux points A et B, dont la distance est $2a$ et une parallèle à AB menée à une distance h. On demande de trouver sur cette parallèle un point M, tel que le rapport des distances aux points A et B soit maximum ou minimum.

— Trouver le maximum de la surface totale du tronc de cône inscrit dans un hémisphère de rayon R.

— On donne une circonférence de rayon R, un point a à une distance d du centre et un point A situé sur la perpendiculaire au plan du cercle passant par le point a et à une hauteur h au-dessus de ce plan. Trouver le maximum ou le minimum de l'angle que forme une ligne allant du point A

à un point quelconque du cercle avec la tangente en ce point. Dans l'équation $ax^2 + bx + ac^2 = 0$ déterminer les coefficients de manière que l'une des racines soit le cube de l'autre.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE TOULOUSE.

par M. Combebiac (1er prix).

Problème.

1\. — *On donne dans un même plan, une droite indéfinie* AB *et deux points* M *et* N, *situés hors de cette droite et l'on demande de trouver sur* AB *un point tel que la somme de ses distances aux deux points* M *et* N *soit égale à une longuenr donnée* K.

Parmi toutes les valeurs qui sont attribuées à K, *quelle est celle qui est minimum?*

On résoudra le problème soit en y appliquant le calcul algébrique, soit par la géométrie pure.

2\. — *On considère en second lieu le cas où la droite* AB *et les points* M *et* N *ne seraient pas situés dans le même plan. On montrera comment on peut résoudre le même problème en ramenant le nouveau cas au premier.*

Nous savons que le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante et égale à K est une ellipse dont ces deux points sont les foyers et dont le grand axe est égal à K. Si nous savons trouver le point de rencontre de cette ellipse et de la droite donnée AB, ce point de rencontre sera évidemment le point P cherché. Le problème est donc ramené au suivant, traité dans le cours de mathématiques élémentaires.

Trouver le point de rencontre d'une droite et d'une ellipse donnée par son foyer et son grand axe.

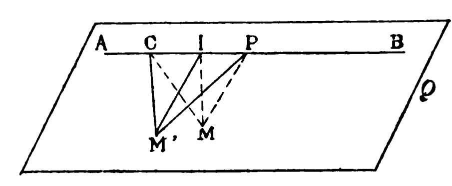
Nous savons d'ailleurs que ce nouveau problème admet deux solutions P et P′. Il est évident que le minimum de K a lieu, lorsque la droite est tangente à l'ellipse. On obtiendra donc le point de la droite répondant à ce minimum de K comme point de contact d'une ellipse tangente à la droite

donnée et ayant pour foyers les deux points M et N (problème du cours). La valeur de ce minimum est donnée par le triangle MNM'. En effet, si nous désignons par α l'angle que font les deux droites AB et MN, par $2c$ la longueur focale MN, par $2d$ la longueur MM', le triangle MNM' donne :

$$K^2 = \overline{M'N}^2 = 4c^2 + 4d^2 - 8cd \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 4c^2 + 4d^2 + 8cd \sin \alpha$$

$$K = 2\sqrt{c^2 + d^2 + 2cd \sin \alpha}.$$

Considérons maintenant le cas où la droite AB et les points M et N ne sont pas situés dans un même plan. Menons le plan passant par la droite donnée et le point N par exemple. Soit Q ce plan. Du point M menons une perpendiculaire MC sur AB, et du point C dans le plan Q une autre perpendiculaire sur AB. Prenons sur cette perpendiculaire une longueur CM' = CM. Je dis que I étant un point quelconque de AB j'ai toujours M'I = MI. Pour le prouver, je joins MI, M'I. Les deux triangles CIM', CIM sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. De leur égalité résulte M'I = MI. Cela posé, P étant un point pris sur AB tel que M'P + MP = K, on a d'après ce que nous venons de dire : MP + NP = M'P + NP = K.



Et le problème est ainsi ramené au premier cas.

QUESTIONS PROPOSÉES

135. — Prouver que la portion du diamètre du cercle circonscrit à un triangle ABC comprise entre le sommet A et le côté opposé BC est égale à

$$\frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{\sin 2B + \sin 2C}.$$

136. — Mener un cercle tangent à deux droites données de position, de telle sorte que si l'on mène une tangente parallèle à une direction donnée et terminée aux lignes données, le rectangle des segments déterminés par le point de contact soit égal à un carré donné.

137. — On inscrit un triangle ABC dans un cercle; la tangente en A rencontre BC en Q. Par le point Q, on mène une perpendiculaire à la bissectrice de l'angle en A, perpendiculaire qui coupe le cercle en des points X, Y; démontrer que la distance de l'un de ces points au point A est moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux points B et C.

138. — Si l, m, n sont les médianes d'un triangle, démontrer que sa surface a pour expression

$$\frac{abc}{a+b+c} \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C, \text{ ou}$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{2 l^2 m^2 + 2 l^2 n^2 + 2 m^2 n^2 - l^4 - m^4 - n^4}.$$

139. — Du milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle on élève une perpendiculaire sur cette hypoténuse. Démontrer que les segments qu'elle détermine sur la ligne joignant les centres des carrés construits sur les autres côtés sont proportionnels aux côtés du triangle.

140. — Prouver que dans un triangle on a :

$$\frac{R}{r} = \frac{a+b+c}{a \cos A + b \cos B + c \cos C}.$$

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 19882-8.

TABLE DES MATIÈRES

PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TOME II

Arithmétique.

Algèbre.

Géométrie.

Examens divers.

Concours académiques.

Baccalauréats ès-sciences.

Concours académiques Solutions.

Questions résolues.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET C[ie],
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 19882-8.